Matematica e politica

Marco LiCalzi

Università Ca' Foscari Venezia

A.L.I.MA.
Genova, 20 gennaio 2020

Tre storie

1) Interi, resti e divisori:
   L'aritmetica delle (piccole) riforme elettorali

2) Combinazioni e permutazioni:
   Maggioranze qualificate e potere decisionale

3) Ordinamenti e aggregazioni:
   L'ambiguità dei sistemi elettorali

1. Suddivisione di beni indivisibili

Ci sono 21 computer da distribuire fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota
A	727	67.8%	14.24
B	123	11.5%	2.41
C	222	20.7%	4.35
Tot.	1072	100%	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola la sua quota di computer.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer!)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

1. Suddivisione di beni indivisibili

Ci sono 21 computer da distribuire fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota	Proposta
A	727	67.8%	14.24	15
B	123	11.5%	2.41	2
C	222	20.7%	4.35	4
Tot.	1072	100%	21	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola la sua quota di computer.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer!)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

1. Suddivisione di beni indivisibili

Ci sono 21 computer da distribuire fra le tre scuole del plesso ABC in proporzione al numero degli studenti.

Scuola	Studenti	% Studenti	Quota	Proposta
A	727	67.8%	14.24	14
B	123	11.5%	2.41	3
C	222	20.7%	4.35	4
Tot.	1072	100%	21	21

La soluzione proporzionale assegna ad ogni scuola la sua quota di computer.

Problema: ogni computer va assegnato ad una sola scuola.
(Non sono ammesse le frazioni di computer!)

Se diamo 15 computer ad A e 2 a B, ci saranno proteste.

Se diamo 14 computer ad A e 3 a B, ci saranno proteste.

Il problema dell'equa suddivisione

Dobbiamo ripartire un insieme di oggetti identici e indivisibili in modo proporzionale:

- i computers fra le scuole di un plesso in proporzione al numero degli studenti;
- la collezione di biglie del nonno fra gli eredi in proporzione alle quote di legittima;
- i seggi della Camera in proporzione al numero dei voti ricevuti da ciascun partito (sistema proporzionale);
- i seggi da assegnare a ciascuno stato in proporzione alle rispettive popolazioni (sistema federale).

Se le quote proporzionali non sono intere, ci saranno proteste.

Cerchiamo un metodo di approssimazione *equo*.

Un problema “costituzionale”

Costituzione degli Stati Uniti (1789), Art. 1, Sezione 2:

“Representatives [...] shall be apportioned among the several States [...] according to their respective numbers [...] The number of Representatives shall not exceed one for every thirty thousand, but each State shall have at least one Representative.”

L’assegnazione di seggi ad ogni stato deve essere proporzionale alla sua popolazione.

La Costituzione U.S.A. incarica il Congresso di stabilire il modo migliore di approssimare la soluzione ideale.

“That which cannot be done perfectly must be done in a manner as near perfection as may be.” (Webster, 1832)

La soluzione del buon padre di famiglia

Stato	Pop.	Quota
A	727	14.24
B	123	2.41
C	222	4.35
Tot.	1072	21

Diamo a ciascuno la parte intera della sua quota.

Metodo di Hamilton

Ogni stato riceve la parte intera della sua quota.
I seggi residui sono assegnati agli stati con i resti più alti.

La soluzione del buon padre di famiglia

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto
A	727	14.24	14	.24
B	123	2.41	2	.41
C	222	4.35	4	.35
Tot.	1072	21	20	1

Avanza ancora un seggio da attribuire.

Metodo di Hamilton

Ogni stato riceve la parte intera della sua quota.
I seggi residui sono assegnati agli stati con i resti più alti.

La soluzione del buon padre di famiglia

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto	Hamilton
A	727	14.24	14	.24	14
B	123	2.41	2	.41	3
C	222	4.35	4	.35	4
Tot.	1072	21	20	1	21

Diamo i seggi residui agli stati con i resti più alti.

Metodo di Hamilton

Ogni stato riceve la parte intera della sua quota.
I seggi residui sono assegnati agli stati con i resti più alti.

La soluzione del buon padre di famiglia

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Resto	Hamilton
A	727	14.24	14	.24	14
B	123	2.41	2	.41	3
C	222	4.35	4	.35	4
Tot.	1072	21	20	1	21

Diamo i seggi residui agli stati con i resti più alti.

Metodo di Hamilton

Ogni stato riceve la parte intera della sua quota.
I seggi residui sono assegnati agli stati con i resti più alti.

La storia non finisce qui

Nel corso degli anni sono state proposte diverse soluzioni: Hamilton (1791), Jefferson (1791), Webster (1830), Adams (1830), Dean (1832), Hill (1911).

Washington oppose il primo veto presidenziale nella storia degli U.S.A. contro la legge che proponeva il metodo di Hamilton.

Il Congresso riesaminò la legge e rimpiazzò il metodo di Hamilton con quello di Jefferson.

Gli U.S.A. hanno modificato la legge elettorale più volte:

- 1792–1840: Jefferson;
- 1840–1850: Webster;
- 1850–1911: Hamilton;
- 1911–1941: Webster;
- 1941–oggi: Hill.

Il paradosso della popolazione

Se non si vuole ridurre tutto a una questione di potere, bisogna valutare un metodo in base ad argomenti di equità e di buon senso.

Ecco un buon argomento per *non* utilizzare Hamilton.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Pop.	Quota	Ham.
A	752	5.013	5	753	3.984	4
B	101	0.673	1	377	1.995	2
C	99	0.660	1	96	0.508	0
D	98	0.653	0	97	0.513	1
Tot.	1050	7	7	1323	7	7

La popolazione di A è aumentata e i suoi seggi sono diminuiti.

La popolazione di D è diminuita e i suoi seggi sono aumentati.

Ci sono metodi immuni da questo problema?

Il paradosso dell'Alabama

Date popolazioni costanti, aumentare il numero totale dei seggi può ridurre il numero dei seggi assegnati ad uno stato.

Prendiamo il solito esempio, con 21 e con 22 seggi.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Quota	Ham.
A	727	14.24	14	14.92	15
B	123	2.41	3	2.52	2
C	222	4.35	4	4.56	5
Tot.	1072	21	21	22	22

I numero dei seggi aumenta da 21 a 22, ma i seggi assegnati a B diminuiscono.

Ci sono metodi immuni da questo problema?

Qual è il problema con Hamilton?

Il metodo di Hamilton funziona in due stadi:

1) Assegna i seggi secondo la parte intera della quota.
2) Assegna i seggi residui in base ai resti più alti.

La parte intera ed i resti dipendono in modo diverso dalle popolazioni e dal numero dei seggi disponibili.

Il metodo di Hamilton assegna i seggi usando due logiche diverse, che non sono necessariamente coerenti.

Cambiamo modo di ragionare

Cerchiamo un metodo unitario per assegnare tutti i seggi, seguendo lo stesso criterio dall'inizio alla fine.

Stato	Pop. (p)	Quota	Seggi (s)
A	727	14.24	14
B	123	2.41	2
C	222	4.35	4
Tot.	1072	21	20

Il rapporto p/s indica il numero di elettori per seggio, che è opportuno tenere il più simile possibile fra gli stati.

Assegnamo i seggi uno alla volta, seguendo l'ordine di priorità dato dall'indice p_i/s_i.

Valori più alti dell'indice denotano una priorità maggiore.

Cambiamo modo di ragionare

Cerchiamo un metodo unitario per assegnare tutti i seggi, seguendo lo stesso criterio dall'inizio alla fine.

Stato	Pop. (p)	Quota	Seggi (s)	Pop/Seggi (p/s)
A	727	14.24	14	51.93
B	123	2.41	2	61.50
C	222	4.35	4	55.50
Tot.	1072	21	20	

Il rapporto p/s indica il numero di elettori per seggio, che è opportuno tenere il più simile possibile fra gli stati.

Assegnamo i seggi uno alla volta, seguendo l'ordine di priorità dato dall'indice p_i/s_i.

Valori più alti dell'indice denotano una priorità maggiore.

Cambiamo modo di ragionare

Cerchiamo un metodo unitario per assegnare tutti i seggi, seguendo lo stesso criterio dall'inizio alla fine.

Stato	Pop. (p)	Quota	Seggi (s)	Pop/Seggi (p/s)
A	727	14.24	14	51.93
B	123	2.41	2	61.50
C	222	4.35	4	55.50
Tot.	1072	21	20	

Il rapporto p/s indica il numero di elettori per seggio, che è opportuno tenere il più simile possibile fra gli stati.

Assegnamo i seggi uno alla volta, seguendo l'ordine di priorità dato dall'indice p_i/s_i.

Valori più alti dell'indice denotano una priorità maggiore.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

All'inizio, nessun seggio è stato assegnato.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	0	∞
B	123	2.41	0	∞
C	222	4.35	0	∞
Tot.	1072	21	0	

Assegniamo un seggio a ciascuno dei tre stati.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

Adesso tutti gli stati hanno un seggio. Ricalcoliamo l'indice.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	1	727
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	3	

Assegniamo il prossimo seggio ad A che ha l'indice maggiore.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

Adesso A ha due seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	2	363.5
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	4	

Assegniamo un altro seggio ad A.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

Adesso A ha tre seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	3	242.3
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	5	

Assegniamo un altro seggio ad A.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

Adesso A ha quattro seggi, B uno e C uno.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	4	181.8
B	123	2.41	1	123
C	222	4.35	1	222
Tot.	1072	21	6	

Diamo il settimo seggio a C.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

... e così via, fino ad assegnare il ventunesimo seggio.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	14	51.9
B	123	2.41	2	61.5
C	222	4.35	4	55.5
Tot.	1072	21	20	

Diamo l'ultimo seggio disponibile a B.

Facciamo un esempio

Assegnamo i seggi seguendo l'ordine di priorità dato da p_i/s_i.

Ed ecco l'assegnazione finale.

Stato	Pop.	Quota	Seggi	Indice
A	727	14.24	14	51.9
B	123	2.41	3	41
C	222	4.35	4	55.5
Tot.	1072	21	21	

In questo caso, è la stessa assegnazione di Hamilton.

I metodi di Jefferson, Adams e Webster

Questa procedura equivale al metodo di Adams, che dispensa i seggi secondo un ordine di priorità dato da p/s.

L'indice di priorità p/s è calcolato *prima* di assegnare il seggio.

Si possono usare altri criteri di priorità.

Il metodo di Jefferson equivale al criterio $p_i/(s_i+1)$, che calcola l'indice dopo avere assegnato il seggio.

Il metodo di Webster sta a mezza strada e usa $p/(s+1/2)$.

Stato	Pop.	Quota	Ham.	Ada.	Jef.	Web.
A	727	14.24	14	14	15	15
B	123	2.41	3	3	2	2
C	222	4.35	4	4	4	4
Tot.	1072	21	21	21	21	21

Il metodo di Jefferson (1791)

Si sceglie un divisore d che rappresenta il numero ideale di elettori per seggio.

Il rapporto p/d si chiama quoziente. Ogni stato riceve la parte intera del suo quoziente.

Stato	Pop.	Quota	Quoziente	Jef.
A	727	14.24	15.15	15
B	123	2.41	2.56	2
C	222	4.35	4.62	4
Tot.	1072	21		21

La scelta del divisore d va calibrata in base al numero dei seggi.

Ad esempio, per assegnare 21 seggi abbiamo usato $d = 48$.

Questo metodo in Europa è noto anche sotto il nome di d'Hondt.
Invece, il metodo di Webster è noto sotto il nome di Sainte-Laguë.

I metodi con divisore

Si sceglie un divisore d e si calcola il quoziente p/d.

Bisogna scegliere d in modo che i calcoli tornino: $\sum_k (p_k/d) = n$.

- Jefferson: usa (p_k/d) arrotondato per difetto.
- Adams: usa (p_k/d) arrotondato per eccesso
- Webster: usa (p_k/d) arrotondato all'intero più vicino.

Webster: cerchiamo d tale che $\sum_k [p_k/d] = 21$.

Con $d = .51$, $A \to [14.24], B \to [2.41], C \to [4.35]$. La somma vale 20.

Con $d = .50$, $A \to [14.54], B \to [2.46], C \to [4.44]$. La somma vale 21.

Stato	Pop.	Quota	Jef.	Ada.	Web.
A	727	14.24	15	14	15
B	123	2.41	2	3	2
C	222	4.35	4	4	4
Tot.	1072	21	21	21	21

Dean e Hill arrotondano usando la media armonica e geometrica.

L'importanza di essere coerenti

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Pertanto è soggetto ai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque: Jefferson, Adams, Webster, Dean, Hill.

Tutti assegnano i seggi seguendo un unico ordinamento di priorità.

Ciò li rende immuni dai paradossi.

Teorema. Un metodo è coerente, bilanciato e imparziale se e solo se si basa su un ordinamento di priorità.

Teorema. Fra tutti i metodi coerenti, imparziali, omogenei ed esatti soltanto i metodi con divisore evitano il paradosso della popolazione.

L'importanza di essere coerenti

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Pertanto è soggetto ai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque: Jefferson, Adams, Webster, Dean, Hill.

Tutti assegnano i seggi seguendo un unico ordinamento di priorità.

Ciò li rende immuni dai paradossi.

Teorema. Un metodo è coerente, bilanciato e imparziale se e solo se si basa su un ordinamento di priorità.

Teorema. Fra tutti i metodi coerenti, imparziali, omogenei ed esatti soltanto i metodi con divisore evitano il paradosso della popolazione.

L'importanza di essere coerenti

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Pertanto è soggetto ai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque: Jefferson, Adams, Webster, Dean, Hill.

Tutti assegnano i seggi seguendo un unico ordinamento di priorità.

Ciò li rende immuni dai paradossi.

Teorema. Un metodo è coerente, bilanciato e imparziale se e solo se si basa su un ordinamento di priorità.

Teorema. Fra tutti i metodi coerenti, imparziali, omogenei ed esatti soltanto i metodi con divisore evitano il paradosso della popolazione.

L'importanza di essere coerenti

Hamilton assegna i seggi seguendo due criteri di priorità diversi: prima la parte intera, poi i resti.

Pertanto è soggetto ai paradossi.

I principali metodi con divisore sono cinque: Jefferson, Adams, Webster, Dean, Hill.

Tutti assegnano i seggi seguendo un unico ordinamento di priorità.

Ciò li rende immuni dai paradossi.

Teorema. Un metodo è coerente, bilanciato e imparziale se e solo se si basa su un ordinamento di priorità.

Teorema. Fra tutti i metodi coerenti, imparziali, omogenei ed esatti soltanto i metodi con divisore evitano il paradosso della popolazione.

La soluzione italiana

La Costituzione del 1948 scelse il metodo di Webster per l'elezione del Senato su base regionale.

La riforma del 1963 lo ha sostituito con il metodo di Hamilton.

Art. 57: "Il Senato della Repubblica è eletto a base regionale. [...] Il numero dei senatori elettivi è di 315, sei dei quali eletti nella circoscrizione Estero. Nessuna Regione può avere un numero di senatori inferiore a sette; il Molise ne ha due, la Valle d'Aosta uno. [...] La ripartizione dei seggi tra le Regioni [...] si effettua [...] in proporzione alla popolazione delle Regioni, [...] sulla base dei quozienti interi e dei più alti resti."

Spesso (non sempre!) i due metodi producono gli stessi risultati.

Molto più difficile da spiegare è il "minimo garantito".

Senato: Elezioni del 2006

Nel 2006 una popolazione di 56.995.644 ha eletto 309 senatori, pari ad un rapporto di $\boxed{184.452}$ elettori per seggio.

Confrontiamo i seggi assegnati dalla Costituzione del 1963 rispetto al metodo di Webster (con minimo garantito di uno).

	Costituzione	p/s	Webster	p/s
Veneto	24	188654	24	188654
Lombardia	47	192182	49	184338
Calabria	10	201145	11	182861
Abruzzo	7	180342	7	180342
Umbria	7	117975	4	206457
Basilicata	7	85395	3	199256
Molise	2	160301	2	160301
VdA	1	119548	1	119549

Sommario

La Costituzione degli Stati Uniti (1789) propone al Congresso un problema aritmetico, da cui dipende anche l'elezione del Presidente.

Questo problema aritmetico non ammette una soluzione esatta.

Pertanto bisogna usare soluzioni approssimate.

Negli Stati Uniti l'approssimazione in uso è cambiata più volte.

La nostra Costituzione fissa una soluzione, citando "quozienti" e "resti" negli articoli 56 e 57.

L'approssimazione scelta dalla nostra Costituzione è facile, ma non è la più convincente.

2. Numero di voti e potere decisionale

Il potere decisionale di un gruppo in un'assemblea è la sua capacità di determinare l'esito di una votazione.

La relazione fra il numero di voti di un gruppo e il suo potere decisionale non è direttamente proporzionale.

Supponiamo che Italia, Vaticano e San Marino si consorzino in un'area di libero scambio.

In base all'importanza relativa dei partners, si concorda che l'Italia abbia 3 voti mentre Vaticano e San Marino ne abbiamo 1.

Se le decisioni si prendono a maggioranza assoluta, il potere dell'Italia non è circa il triplo di quello dei suoi partners.

Come si valuta il potere decisionale di un gruppo?

Cronache dalla CEE

Nel 1958, il trattato di Roma dà vita alla Comunità Economica Europea, antesignana dell'Unione Europea.

Il primo allargamento sarà solo nel 1973 (UK, DK, IRL), dopo 15 anni.

I paesi fondatori sono sei: F, G, I, B, NL, L.

Il quorum necessario per prendere una decisione è 12 voti su 17.

La distribuzione dei voti è: F (4), G(4), I (4), B (2), NL (2), L (1).

Il quorum è pari.

Tutti i paesi tranne il Lussemburgo hanno un numero di voti pari.

Il voto del Lussemburgo non è mai necessario per il quorum.
In altre parole, il Lussemburgo ha potere nullo!

Sistemi di voto ponderato

EEC 1958. Sei paesi: D, F, I (4 voti); B, NL (2 voti); L (1 voto).
Ogni coalizione con 12 votes (su 17) ha potere decisionale.

Questo è un esempio di voto ponderato:

Quorum	D	F	I	B	NL	L	Voti
12	4	4	4	2	2	1	17

In forma più compatta, possiamo scrivere

$$[12 : 4, 4, 4, 2, 2, 1]$$

EEC 1973. Allargamento a nove paesi: D, F, I, UK (10 voti); B, NL (5); DK, IRL (3); L (2).
Il quorum deliberativo è fissato a 41 voti (su 58).

In breve, il sistema è $[41 : 10, 10, 10, 10, 5, 5, 3, 3, 2]$.

Sistemi complessi

Consiglio di Sicurezza delle Nazioni Unite. 15 componenti: cinque permanenti (US, PRC, UK, F, RU) con potere di veto.
Il quorum deliberativo è 9 su 15, a meno di veti.

USA. 537 votanti: 435 rappresentanti, 100 senatori, 1 presidente, 1 vice-presidente. Si approva una legge se sono favorevoli:

1. 218^+ rapp., 51^+ senatori e 1 presidente;
2. 218^+ rapp., 50 senatori, 1 vicepresidente e 1 presidente;
3. 290^+ rapp. e 67^+ senatori.

Costituzione canadese. Gli emendamenti alla Costituzione devono essere approvati da almeno 7 province (su 10) e almeno dal 50% della popolazione totale.

Quale fra questi sistemi equivale a un sistema di voto ponderato?
(Soltanto il primo: $[39 : 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$.)

L'indice di potere di Shapley-Shubik

Una coalizione vincente S che decide da sola ha valore $v(S) = 1$.

Una coalizione perdente S non decide da sola e ha valore $v(S) = 0$.

Facciamo entrare gli agenti uno alla volta in assemblea.

Supponete che al suo ingresso l'agente i trovi una coalizione S.
L'agente i è pivotale se $v(S \cup \{i\}) = 1$ ma $v(S) = 0$.

Se consideriamo tutti i possibili ordinamenti di agenti, l'indice di potere per i è dato dal numero medio di volte in cui questi è pivotale.

Esempio

Ci sono tre agenti (Aldo, Bea, Dino).

Ciascuno ha un voto e si decide a maggioranza: il sistema è

$$[2; 1, 1, 1]$$

Ci sono $3! = 6$ possibili ordinamenti.

Ordin.	Aldo	Bea	Dino
ABD	0	1	0
ADB	0	0	1
DAB	1	0	0
DBA	0	1	0
BDA	0	0	1
BAD	1	0	0
Somma	2	2	2
Indice	1/3	1/3	1/3

Casi di studio per Shapley-Shubik

Sistema	Aldo	Bea	Dino
$[4 : 2, 2, 1]$	$1/2$	$1/2$	0
$[4 : 3, 2, 1]$	$2/3$	$1/6$	$1/6$
$[5 : 3, 2, 1]$	$1/2$	$1/2$	0
$[5 : 3, 2, 2]$	$2/3$	$1/6$	$1/6$
$[5 : 3, 3, 2]$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

EEC 1958: l'indice è $0{,}2\overline{3}$ per D, F, I; 0,15 per B, NL; 0 per L.

Stato	Voti	% voti	indice	% potere
F, G, I	4	23,5%	$14/60$	23,3%
B, NL	2	11,8%	$9/60$	15,0%
L	1	5,9%	0	0%

Nazioni Unite: l'indice è 19.63% per ogni membro permanente e 0.186% per ogni membro non permanente.

Calcolo dell'indice per EEC 1958

Ci sono sei stati: $F, G, I \to 4$ voti; $B, NL \to 2$; $L \to 1$.
È richiesta una maggioranza qualificata di 12 voti su 17.

Calcoliamo

$$\mathrm{I}(F) = \frac{\text{no. ordinamenti dove } F \text{ è pivotale}}{\text{no. totale di possibili ordinamenti}}$$

Al denominatore, il numero di ordinamenti possibili è $6! = 720$.

Gli ordinamenti dove F risulta pivotale sono di più tipi:

a) F è preceduta da 8 voti;

b) F è preceduta da 9 voti;

c) F è preceduta da 10 voti;

d) F è preceduta da 11 voti.

Esaminiamo a seguire tutti i sottocasi.

a.1) F è preceduta da G, B, NL: $3! \times 2! = 12$ casi.
a.2) F è preceduta da I, B, NL: $3! \times 2! = 12$ casi.
a.3) F è preceduta da G, I: $2! \times 3! = 12$ casi.

b.1) F è preceduta da G, B, NL, L: $4! \times 1! = 24$ casi.
b.2) F è preceduta da I, B, NL, L: $4! \times 1! = 24$ casi.
b.3) F è preceduta da G, I, L: $3! \times 2! = 12$ casi.

c.1) F è preceduta da G, I, B: $3! \times 2! = 12$ casi.
c.2) F è preceduta da G, I, NL: $3! \times 2! = 12$ casi.

d.1) F è preceduta da G, I, B, L: $4! \times 1! = 24$ casi.
d.2) F è preceduta da G, I, NL, L: $4! \times 1! = 24$ casi.

Si ottiene

$$\mathrm{I}(F) = \frac{36 + 60 + 24 + 48}{720} = \frac{14}{60} = 0{,}2\overline{3}$$

Per simmetria, $\mathrm{I}(G) = \mathrm{I}(I) = 0{,}2\overline{3}$.

Giacché $\mathrm{I}(L) = 0$ e $\mathrm{I}(F) + \mathrm{I}(G) + \mathrm{I}(I) = 0{,}7$, si ottiene per differenza

$$\mathrm{I}(B) = \mathrm{I}(NL) = 0{,}15$$

Indice di Banzhaf

L'indice di Banzhaf è un'alternativa, più facile da calcolare.

Un componente di una coalizione vincente è critico se la sua presenza è necessaria affinché la coalizione resti vincente.

Il potere decisionale di un agente secondo Banzhaf è dato dal numero di coalizioni vincenti dove questi risulta critico.

L'indice di Banzhaf per l'agente i è la sua quota di potere:

$$\mathrm{B}(i) = \frac{\text{potere di } i}{\text{somma del potere di tutti}}$$

Esempio:

Stato	Voti	% voti	BI	% potere
F, G, I	4	23,5%	5/21	23,8%
B, NL	2	11,8%	3/21	14,3%
L	1	5,9%	0	0%

Nassau County, New York, 1965

Nel 1965 la contea di Nassau aveva 6 distretti per 115 voti totali.

La distribuzione dei voti era: Hempstead 1 (31), Hempstead 2 (31), Oyster Bay (28), North Hempstead (21), Long Beach (2), Glen Cove (2).

Le decisioni erano prese a maggioranza. Il sistema era

$$[58; 31, 31, 28, 21, 2, 2]$$

In una serie di cause legali, Banzhaf argomentò con successo che il potere decisionale era distribuito in parti uguali esclusivamente fra i tre distretti maggiori.

Casi di studio per Banzhaf

Sistema	Aldo	Bea	Dino
$[4:2,2,1]$	$1/2$	$1/2$	0
$[4:3,2,1]$	$3/5$	$1/5$	$1/5$
$[5:3,2,1]$	$1/2$	$1/2$	0
$[5:3,2,2]$	$3/5$	$1/5$	$1/5$
$[5:3,3,2]$	$1/3$	$1/3$	$1/3$

EEC 1973: l'indice è 16,72% per D, F, I UK; 9,15% per B, NL; 6,62% per DK, IRL; 1,58% per *L*.

Nazioni Unite: l'indice è 16,69% per ogni membro permanente e 1,653% for ogni membro non permanente.

3. Democrazia ed elezioni

[La democrazia è una] forma di governo in cui la sovranità risiede nel popolo, che la esercita per mezzo delle persone e degli organi che elegge a rappresentarlo.

M. Equicola (1525)

Agli storici del futuro potrebbe bastare una frase per descrivere il fallimento di una intera classe politica: "Nel 2020 il Parlamento italiano approvò la sesta legge elettorale in meno di trent'anni."

A. Polito (Corriere della Sera, 20.12.2019)

Quali procedure elettorali sono democratiche?

Scelte sociali

In un problema di scelta sociale, un gruppo di elettori sceglie collettivamente fra più candidati.

Supponiamo che gli *exit polls* diano le seguenti preferenze fra i tre candidati (A, B, C).

[22%]	[23%]	[15%]	[29%]	[7%]	[4%]
A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	B	A
C	B	C	A	A	B

Se ciascuno vota la prima scelta, $A \to 45\%, B \to 44\%, C \to 11\%$.

Se si vota fra due candidati, B–C 66%-34% e B–A 51%-49%.

Qual è la scelta "giusta"?

Questo è in sintesi il dibattito fra Borda e Condorcet, condotto al tempo della Rivoluzione Francese.

Due candidati

Ci sono $n \geq 3$ elettori e due candidati a e b.
Ogni elettore ha una preferenza sui candidati: $a \succ b$ oppure $b \succ a$.

Teorema. (May, 1952) La regola di maggioranza (assoluta) è l'unica procedura imparziale e concorde.

La procedura è sincera: nessun elettore ha interesse a mentire votando per un candidato diverso da quello che preferisce di più.

Più candidati

Proviamo a generalizzare la regola di maggioranza quando ci sono $m \geq 3$ candidati (ed $n \geq 3$ elettori).

Ci sono cinque candidati e sette elettori, che votano sinceramente.

1	2	3	4	5	6	7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

Maggioranza semplice

1) **Maggioranza semplice.** Ogni elettore vota per un candidato; vince il candidato che raccoglie più voti.

1	2	3	4	5	6	7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

La regola di maggioranza semplice sceglie a, che ottiene 3 voti.

La sincerità non è garantita: se gli elettori 6 e 7 votano per la loro "seconda scelta" c (preferita su a), possono farlo vincere.

Conteggio di Borda

2) **Conteggio di Borda.** Ogni elettore mette i candidati in ordine di preferenza ed assegna $s_k = m - k$ punti al k-mo candidato; vince chi raccoglie più punti.

1	2	3	4	5	6	7	Punti
a	a	a	c	c	b	e	4
b	d	d	b	d	c	c	3
c	b	b	d	b	d	d	2
d	e	e	e	a	a	b	1
e	c	c	a	e	e	a	0

Risultato: $a \to 14, \quad b \to 17, \quad c \to 16, \quad d \to 16 \quad e \to 7.$
Il conteggio di Borda sceglie b.

Questa procedura è un caso speciale di conteggio con classifica, dove si usano pesi $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_m$.

(Sincerità) Se l'elettore 4 dichiarasse $c \succ e \succ d \succ a \succ b$, farebbe vincere la sua prima scelta c.

Ballottaggio

3) **Ballottaggio.** Ogni elettore vota per un candidato; i due candidati più votati avanzano al ballottaggio, dove si usa la regola di maggioranza.

1	2	3	4	5	6	7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

Avanzano al ballottaggio a e c. Al turno successivo, c vince 4–3.

(Sincerità) Se al primo turno gli elettori 1–3 votano per la loro seconda/terza scelta b, b avanza al ballottaggio e prevale su c.

Torneo a eliminazioni successive

4) **Torneo.** Si vota a coppie seguendo un ordine prestabilito. Chi vince avanza al turno successivo. Si elegge il candidato che esce vincente dall'ultimo confronto.

1	2	3	4	5	6	7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

Procediamo in ordine alfabetico. Al primo turno b elimina a per 4–3. Al secondo turno b elimina c per 4–3. Al terzo turno d elimina b per 4–3. Al quarto turno, d elimina e per 6–1 ed è eletto.

(Sincerità) Se l'elettore 1 al terzo turno vota per c, c batte b per 4–3 e avanza al quarto turno, dove batte d per 5-2. Al quinto turno, d elimina e per 5–2 ed è eletto.

Dittatura

5) **Dittatura** Si elegge il candidato deciso da un elettore prestabilito.

1	2	3	4	5	6	7
a	a	a	c	c	b	e
b	d	d	b	d	c	c
c	b	b	d	b	d	d
d	e	e	e	a	a	b
e	c	c	a	e	e	a

Se 7 è il dittatore, si sceglie e.

(Sincerità) In questa procedura, il dittatore è sempre sincero (e l'opinione degli altri è irrilevante).

Criteri di scelta plausibili

Decisività: la procedura individua sempre almeno un vincitore.

Pareto: se ogni elettore preferisce x a y, la scelta sociale non può essere y.

Monotonia: se x è la scelta sociale e x sale di posto nelle preferenze di un elettore, allora x resta la scelta sociale.

Indipendenza dalle alternative irrilevanti (IIA): se la scelta sociale include x ma non y e gli elettori cambiano preferenze (senza invertire la graduatoria individuale fra x e y), allora y non può diventare una scelta sociale.

Risultati positivi e negativi

	Decisiva	Pareto	Condorcet	Monotonia	IIA
Magg. relativa	si	si	no	si	no
Borda	si	si	no	si	no
Ballottaggio	si	si	si	no	no
Torneo	si	no	si	si	no
Dittatura	si	si	no	si	si

Teo. (Arrow, 1950) Se $|A| \geq 3$ *e* P *è finito, esiste una sola funzione di scelta sociale che soddisfa Pareto, IIA e monotonia: la dittatura.*

Teo. (Gibbard-Satterthwaite, 1973) Se $|A| \geq 3$ *e* P *è finito, esiste una sola funzione di scelta sociale che è decisiva e sincera: la dittatura.*

Coda

> *[La democrazia è una] forma di governo in cui la sovranità risiede nel popolo, che la esercita per mezzo delle persone e degli organi che elegge a rappresentarlo.*
>
> M. Equicola (1525)

La democrazia consiste nell'esercizio della sovranità del popolo, ma questa sovranità non può concretarsi in una procedura elettorale esente da critiche.

Secondo la concezione liberale (Riker, 1982), la sovranità del popolo consiste più modestamente nella possibilità di non confermare chi ha mal governato.

> *Non domandarci la formula che mondi possa aprirti,* [...]
> *Codesto solo oggi possiamo dirti,*
> *ciò che non siamo, ciò che non vogliamo.*
>
> E. Montale (1923)

Riferimenti bibliografici

- W.V. Gehrlein e D. Lepelley, *Elections, voting rules and paradoxical outcomes*, Springer, 2017.
- G. Karaali e L.S. Kahdjavi (a cura di), *Mathematics for social justice: Resources for the college classroom*, MAA Press, 2019.
- M. Li Calzi, "Aritmetica per la Costituzione: La ripartizione dei seggi al Senato", in: M. Emmer (ed.), *Matematica e cultura 2008*, Springer, 2008, 151–162.
- M. Li Calzi, "Matematica ed esercizio della democrazia: L'urna di Pandora", in: M. Emmer (ed.), *Matematica e cultura 2002*, Springer, 2002, 97–107.
- F. Pukelsheim, *Proportional representation: Apportionment methods and their applications*, Springer, 2014.
- E.A. Robinson, Jr. e D.H. Ullman, *The mathematics of politics*, seconda ed., CRC Press, 2016.
- A.D. Taylor e A.M. Pacelli, *Mathematics and politics: Strategy, voting, power and proof*, seconda ed., Springer, 2008.

Grazie per la vostra attenzione