LA NASCITA DEL PROBLEM-SOLVING NEL TESTO DI POLYA
HOW TO SOLVE IT

Giuseppe Ferrera

A.L.I.M.A.

Genova, 5 maggio 2003

PREMESSA

Questa è la relazione su un lavoro svolto nell'ambito del GREMG[1] e nato dall'idea di leggere (o rileggere) i testi più celebri e fondamentali per la didattica o la divulgazione matematica e farne un'occasione di riflessione e discussione.
Il progetto denominato "ABBIAMO LETTO PER VOI…", prevede la stesura di una relazione in cui, accanto alla citazione dei passi che caratterizzano il pensiero dell'autore, si producano esempi e applicazioni e si propongano alcune riflessioni critiche.

In questo caso "ABBIAMO LETTO PER VOI HOW TO SOLVE IT", il celebre testo di George Polya che ha segnato la nascita del *problem solving*.

I passi riportati[2] sono tratti dalla traduzione italiana di Maria Spoglianti:

[1] "Come risolvere i problemi di matematica, logica ed euristica nel metodo matematico". Feltrinelli editore, Milano, 1967

mentre le analisi sui fondamenti psicologici del problem-solving e le riflessioni critiche[3] sono ispirate da un articolo tratto da A.D. Grouws (editor), Hand book on Research on Mathematics Learning and Teaching, Macmillan, New York e da letture di psicologia generale

[2] Alan H. Schoenfeld, "Learning to think mathematically: problem-solving, metacognition, and sense making in mathematics", the University of California, Berkeley, 1992

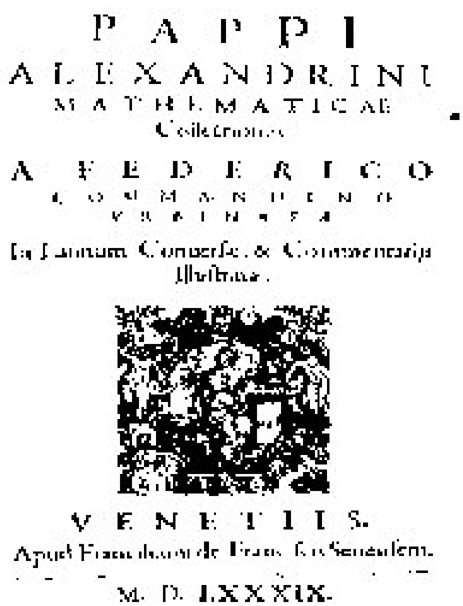
[3] G. Kanizsa, P. Legrenzi, P. Meazzini. "I processi cognitivi", Società editrice il Mulino, Bologna, 1975

L'immagine della copertina è un dipinto ad olio del pittore genovese Antonio G. Santagata, che ha diverse coincidenze con Polya e il suo libro: il titolo del quadro (Problemi) , la contemporaneità (1888-1985), e gli anni dell'esecuzione (intorno al 1936).

[1] Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova, coordinato dalla prof.ssa Fulvia Furinghetti
[2] scritti in carattere corsivo
[3] scritte in carattere tondo

L'EURISTICA CLASSICA[4]

***Euristica** od **euretica**, od **ars inveniendi**, era il nome che contrassegnava un certo tipo di studio caratteristico della logica o della filosofia. Scopo dell'euristica è lo studio dei metodi e delle leggi di invenzione e di scoperta. Qualche traccia di essa può essere ritrovata negli scritti dei primi commentatori di Euclide; a tale proposito esiste un passo particolarmente interessante dovuto a Pappo.*
*Pappo fu un insigne matematico greco vissuto intorno al 300 d.C. Nel settimo libro del suo trattato "Collectiones", egli parla di un tipo di studio che chiama **analyomenos**[5].*


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conversae, & Commentarijs
Illustratae.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

> *"L'euristica è, in poche parole, un particolare tipo di scienza utile a coloro che, dopo avere studiato gli elementi fondamentali della matematica, desiderano acquistare una certa abilità a risolvere problemi. Essa insegna i procedimenti di analisi e sintesi".*

Platone stesso si interessa alla distinzione, stabilita dai geometri, fra l'analisi e la sintesi. Possiamo spiegare il significato dell'analisi con le parole di Pappo:

> *"per risolvere un problema, noi riguardiamo come eseguito ciò che è proposto; e svolgendo le conseguenze che ne risultano, cerchiamo di pervenire a qualcosa che sia conosciuta… se questa cosa è eseguibile, la proposta lo sarà pure."*

Tuttavia l'ultimo problema a cui viene ricondotto il problema proposto può riuscire più generale, perciò all'analisi occorre far seguire la sintesi, per mezzo della quale si dimostra che le soluzioni dell'ultimo problema sono anche soluzioni del dato.

---
[4] [1]: pagine 119 e 144
[5] *risolto* (letteralmente *sciolto sopra*)

L'EURISTICA MODERNA[6]

I tentativi più famosi di conferire all'euristica assetto sistematico risalgono a Descartes, a Leibnitz e a Bolzano.
Ma si deve a George Polya l'aver fatto rivivere l'euristica in forma semplice e moderna, con l'invenzione del problem-solving.

Uno studio profondo di euristica dovrebbe tenere conto sia dei fondamenti logici sia di quelli psicologici di tale disciplina. Lo studio dell'euristica tende a fini ***pratici****; una migliore comprensione delle operazioni mentali che più si rivelano utili per la risoluzione dei problemi può recare ottimi risultati nell'insegnamento e soprattutto nell'insegnamento della matematica.*

Comunemente si dice "problema di routine" ogni esercizio che possa essere risolto o sostituendo particolari dati nella soluzione di un problema generale già condotto a termine o seguendo passaggio per passaggio, senza alcuna manifestazione di originalità, qualche esempio appropriato particolarmente notevole. I problemi di routine possono essere necessari nell'insegnamento della matematica; ma proporre agli alunni unicamente esercizi di questo tipo è un errore imperdonabile.

GEORGE POLYA

[6] [1]: pagine 119 e 135

George Polya nasce a Budapest il 13 dicembre 1887, da genitori entrambi di origine ebraica (il padre Jakab aveva cambiato il cognome da Pollák a Pólya)

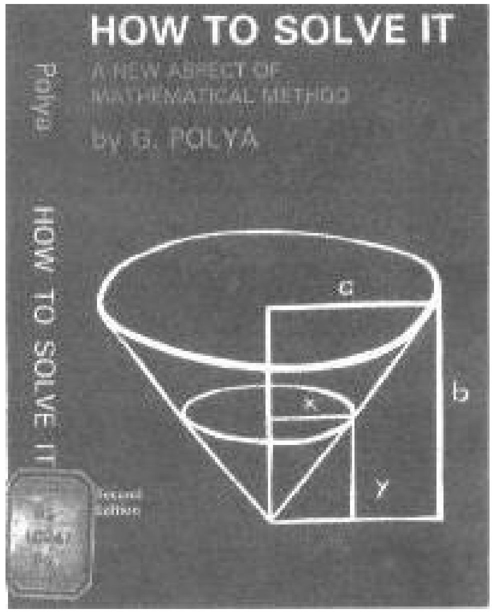
Da giovane George non è interessato alla matematica e i suoi voti sono solo sufficienti. E' strano che una persona che spenderà la vita in così diversi rami della matematica, non ne sia rimasto affascinato ai tempi della scuola. La ragione di questo insuccesso si può attribuire al metodo con cui gli viene impartito l'insegnamento: due dei tre insegnanti di matematica che ha al ginnasio sono definiti da Polya *despicable* (spregevoli).

Nel 1905 Polya entra all'Università: dapprima si iscrive a giurisprudenza, poi a lingua e letteratura, quindi a filosofia e, su consiglio del suo professore, segue corsi di fisica e di matematica. Alla fine decide di intraprendere la carriera del matematico pensando di essere non abbastanza bravo per la fisica e di esserlo troppo per la filosofia.

Si laurea in matematica nel 1912 all'Università di Budapest e si dedica subito all'insegnamento e alla ricerca spostandosi in varie Università europee. Quando scoppia la I Guerra Mondiale è a Zurigo, ma George, che è di idee pacifiste, vuole rimanerne lontano. Inizialmente riformato, viene successivamente chiamato alle armi nell'esercito ungherese: rifiuta e prende la cittadinanza svizzera; ma resterà per le autorità ungheresi sempre reo di renitenza alla leva. Nel 1918 sposa una svizzera, Stella Vera Weber.
La drammatica situazione politica dovuta al nazismo lo fa decidere nel 1940 a lasciare l'Europa per gli Stati Uniti d'America.

Nel 1942 entra definitivamente alla Stanford University.
Nel corso degli anni ha un impatto diretto con l'insegnamento nelle scuole e nei college americani, attraverso visite regolari e lezioni incontra centinaia di studenti che frequentano i suoi seminari di Stanford. Molti di questi giovani diventeranno suoi allievi e intraprenderanno la carriera di matematici.
Nel 1953 lascia l'insegnamento, ma continua indefessamente ad occuparsi di educazione matematica. Negli ultimi anni di vita, nonostante la perdita della vista, segue personalmente la corrispondenza e con grande senso dell'humor ripete: "il mio interesse per la matematica non è ancora spento, ma raramente mi sento in forma per farla".
Muore nel 1985 a Palo Alto, all'età di 97 anni.

Tra i suoi numerosi lavori, il libro di cui Polya andò più fiero è *How to Solve It*, pubblicato nel 1945 negli Stati Uniti. Polya l'aveva con sé nella prima stesura in tedesco quando giunse in America nel 1940 e dovette girare quattro editori prima di trovare quello che glielo vorrà pubblicare. Il libro è stato tradotto in 17 lingue ed ha venduto più di un milione di copie. E' difficile trovare un testo sull'euristica moderna che non faccia riferimento a questo libro. La tecnica del problem solving, ancora oggi oggetto di studi e di applicazioni, è entrata nella pratica comune dell'insegnamento della matematica.



COPERTINA 2^EDIZIONE 1973
PRINCETON UNIVERSITY PRESS, NEW JERSEY

Il testo è una raccolta di note didattiche, a volte leggere e umoristiche, a volte profonde e serie, presentate in una sorta di zibaldone ricco di osservazioni, consigli, esempi visti dalla parte dell'insegnante e degli studenti. L'impronta dello stile è un po' retorica e didascalica, tipica della metà novecento, ma la metodologia e la pratica didattica proposte sono invece sorprendentemente in anticipo sul loro tempo.

If you cannot solve a problem, then there is an easier problem you cannot solve: find it
[Se non riesci a risolvere un problema, allora c'è un problema più facile che tu non sai risolvere: trovalo].

Questo è all'incirca[7] il motto con cui si è diffuso il pensiero di Polya: esso prefigura una nuova tecnica di risolvere i problemi attraverso vari approcci: la generalizzazione, la specializzazione, l'analogia, eccetera.
Un esempio di come Polya sappia unire il serio al faceto è la seguente simpatica descrizione:

Il professore di matematica tradizionale[8]
Le leggende popolari presentano il professore di matematica come una creatura estremamente distratta e costantemente assorta. Di solito, egli si presenta in pubblico con un ombrello stinto in ciascuna mano. Preferisce guardare la lavagna e volgere le spalle alla scolaresca. Scrive ***a****, legge* ***b*** *e vuole significare* ***c****; ma dovrebbe essere* ***d****. Alcuni di questi detti si tramandano di generazione in generazione.*
"Per risolvere questa equazione differenziale, guardatela finché vi verrà in mente una soluzione"
"Questo principio è di una generalità così assoluta che non è possibile farne alcuna applicazione particolare"
"La geometria è l'arte di ragionare in modo esatto su figure errate"
"Il mio metodo di superare le difficoltà consiste nel raggirarle"
"Qual è la differenza tra metodo e artificio? Un metodo è un artificio che può essere usato più volte".
Malgrado tutto ciò si può imparare qualcosa da un simile professore di matematica: Speriamo quindi che non divenga tradizionale, invece, quel professore di matematica dal quale non si può imparare proprio nulla!

---

7 In realtà il testo originario è: *If you cannot solve the proposed problem try to solve first some related problems* [se non riesci a risolvere il problema proposto, cerca dapprima di risolvere qualche problema ad esso collegato]
8 [1]: pagina 204

IL PRIMO ESEMPIO DI PROBLEM SOLVING[9]

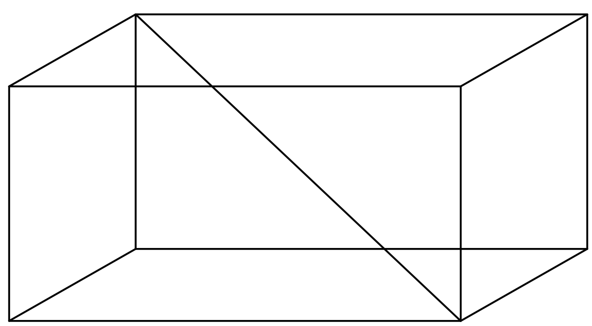
Si consideri il seguente problemino:

Calcolare la misura della diagonale di un parallelepipedo rettangolo, del quale si conoscono le tre dimensioni.

Per risolvere un problema di questo genere con un certo profitto, gli studenti dovrebbero possedere una certa familiarità col teorema di Pitagora e con qualche applicazione del medesimo in geometria piana, mentre non è necessario che essi abbiano conoscenze approfondite di geometria solida. L'insegnante può qui fare affidamento sulla naturale simpatia dei ragazzi per le questioni dello spazio.

Egli può rendere il problema più interessante trasformandolo in una applicazione concreta. L'aula è un parallelepipedo rettangolo le cui dimensioni possono essere misurate direttamente; gli alunni devono allora calcolare la misura della diagonale dell'aula, ossia eseguirne una misura "indiretta".

L'insegnante indica la lunghezza, la larghezza, l'altezza dell'aula e, con un largo gesto della mano, la diagonale; in questo modo egli anima la figura che è stata precedentemente disegnata sulla lavagna e che ora apparirà l'immagine dell'aula.



[9] [1]: pagina 7

Il dialogo tra l'insegnante e gli studenti può quindi iniziare così:

"Qual è l'incognita?"

"La misura della diagonale di un parallelepipedo"

"Quali sono i dati?"

"Le dimensioni del parallelepipedo"

"Si introduca un conveniente sistema di notazioni. Quale lettera si introdurrà per indicare l'incognita?"

"La lettera x"

"E quali lettere per le misure della lunghezza, dell'altezza e della larghezza del parallelepipedo?"

"Le lettere a,b,c"

"Qual è la condizione che intercede tra a,b,c ed x?"

"x è la misura della diagonale di un parallelepipedo di cui la lunghezza, la larghezza e l'altezza misurano rispettivamente a,b e c"

"Si tratta di un problema logico? Cioè la condizione è sufficiente a determinare l'incognita?"

"Sí, la conoscenza di a, b e c individua il parallelepipedo. E, se il parallelepipedo è determinato, è determinata anche la misura della sua diagonale"

Può essere che nessuna idea originale si presenti spontaneamente alle menti degli alunni.

L'insegnante, se non avverte alcun sintomo di progresso da parte della scolaresca, dopo avere atteso pazientemente, deve riprendere sollecito il dialogo con gli alunni. Egli deve essere pronto a ripetere con una qualche modifica quelle domande a cui gli studenti non sanno rispondere da soli; deve essere preparato a scontrasi spesso con lo sconcertante silenzio degli allievi (che, nel contesto, sarà indicato con puntini di sospensione…).

"E' noto un problema connesso con questo?"

…

"Si rifletta sull'incognita! E' noto un problema avente la stessa incognita?"

…

"Suvvia. Qual è l'incognita?"

"La misura della diagonale di un parallelepipedo"

"Ricordate qualche problema con la stessa incognita?"

"No. Non abbiamo risolto nessun problema sulla diagonale di un parallelepipedo"

"E' noto qualche problema avente un'incognita analoga?"

…

"Badate. La diagonale è un segmento. Non avete proprio mai risolto un problema in cui si cercasse la misura di un segmento?"

"Naturalmente! Abbiamo risolto problemi siffatti; per esempio, abbiamo calcolato la misura di un lato di un triangolo rettangolo"

"Bene! Ecco un problema connesso con il nostro e risolto in precedenza. E' possibile sfruttarlo?"

…

"Siete stati abbastanza fortunati a ricordare un problema connesso con quello assegnato ed a voi già noto. Vi piacerebbe poterlo usare? Si possono introdurre elementi ausiliari in modo da rendere possibile il ricorso ad esso?"

…

"Sentite, avete accennato ad un problema relativo ad un triangolo. Non vedete alcun triangolo nella vostra figura?"

E' sperabile che l'ultimo suggerimento risulti abbastanza chiaro da far nascere l'idea della risoluzione, fondata sulla considerazione di un triangolo rettangolo la cui ipotenusa sia la diagonale di misura incognita. Ma l'insegnante non si scoraggi se neppure questa traccia così limpida si rivela sufficiente a dissipare la pigrizia *mentale della scolaresca; piuttosto egli si prepari a sciorinare un'intera gamma di suggerimenti sempre più espliciti.*

"Vi servirebbe un triangolo in figura?"

"E che tipo di triangolo vi farebbe più comodo?"

"Non siete ancora in grado di calcolare la misura della diagonale, ma dite di saper calcolare quella di un lato di un triangolo rettangolo. Allora cosa volete fare?"

"Sapreste risolvere il problema, se la diagonale fosse il lato di un triangolo?"

Quando finalmente, dopo essere stati più o meno aiutati, gli studenti riescono ad introdurre l'elemento ausiliario fondamentale, ossia il triangolo rettangolo di ipotenusa x e cateto c, prima di permettere loro di iniziare i calcoli effettivi l'insegnante dovrebbe accertarsi che la scolaresca possieda ora una netta visione della questione.

"Penso che il disegnare questo triangolo sia stata una buona idea. Adesso avete un triangolo; ma potete risolvere il problema iniziale?"

"Si chiede la misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo; la si può determinare applicando il teorema di Pitagora"

"Certo, se conoscete i cateti, però; ma essi sono veramente noti?"

"Un cateto è dato e la sua misura è c. Non deve essere difficile determinare la misura dell'altro; infatti esso è l'ipotenusa di un altro triangolo rettangolo"

"Benissimo! Mi sembra che ora il piano di risoluzione sia completo."

Il metodo esposto, se ben assimilato, consente di valutare per confronto l'efficacia di determinati suggerimenti che possono essere avanzati con l'intenzione di aiutare gli studenti.

Nell'intenzione più sincera di aiutare i suoi alunni l'insegnante al posto della domanda

"E' noto un problema connesso con questo?"

avrebbe potuto domandare

"Si può applicare il teorema di Pitagora?"

L'intenzione è ottima, ma il quesito è forse il peggiore che potesse essere posto. Cerchiamo di farci un'idea delle circostanze in cui è rivolta questa domanda; verranno spontanee numerose obiezioni ad un "aiuto" siffatto.

1) *L'alunno può comprendere il suggerimento implicito nella domanda, se egli è sul punto di trovare la soluzione; ma è del tutto probabile che non capisca il motivo del quesito dell'insegnante, se non vede ancora la via da seguire. Quindi la domanda precedente non fornisce alcun aiuto proprio a chi, invece, ne ha maggiormente bisogno.*
2) *Se il suggerimento viene compreso, esso dice tutto ed all'alunno resta ormai ben poco da fare.*
3) *Il suggerimento è troppo specifico. Lo studente può farne uso nella risoluzione del problema in istudio, ma non ne ricava alcun ammaestramento per altri esercizi. Non è dunque una domanda istruttiva.*
4) *L'alunno potrà anche comprendere il suggerimento, ma difficilmente riuscirà a spiegarsi come possa essere venuta all'insegnante l'idea di rivolgergli una simile domanda. In che modo potrebbe, spontaneamente, un ragazzo pensare ad un simile quesito? Agli occhi di un allievo tutto ciò assume l'aspetto di un fatto sorprendente, ma innaturale, come il rinvenimento di un coniglio entro il cappello di un prestigiatore. Ed anche questo, in realtà, è molto poco istruttivo.*

I FONDAMENTI LOGICI
DEL PROBLEM SOLVING

- *RIDUZIONE ALL'ASSURDO E DIMOSTRAZIONE INDIRETTA* [10]

Sono due procedimenti distinti ma connessi tra loro.
La ***riduzione all'assurdo*** *prova la falsità di una proposizione assunta come ipotesi deducendo da questa una conclusione manifestamente assurda. La riduzione all'assurdo è un procedimento matematico, ma presenta qualche somiglianza con l'ironia che è il metodo prediletto della satira. L'ironia, a quanto sembra, adotta una certa opinione e la forza, la contorce fino a ricavarne una evidente assurdità.*
La ***dimostrazione indiretta*** *stabilisce la validità di una proposizione provando la falsità della negazione di questa. Quindi la dimostrazione indiretta può essere paragonata al trucco di certi uomini politici che esaltano i candidati del loro partito demolendo la reputazione dei loro avversari.*
…
I metodi che stiamo descrivendo sollevarono fin dai tempi antichi considerevoli obiezioni. Intorno ad essi sono state tessute molte critiche che, in effetti, altro non sono che forme diverse di una medesima obiezione fondamentale. …
Sembra una cosa difficile e strana dedurre una verità da una "riduzione all'assurdo". Si tratta di un procedimento che si snoda a partire da un'ipotesi falsa dalla quale trae poi conseguenze che analogamente, benché forse meno visibilmente, sono false per condurre, infine, ad un'ultima deduzione che è un assurdo evidente. Per non ritenere nella mente false proposizioni. bisognerebbe dimenticare ciascuna deduzione siffatta al più presto, il che non è semplice, perché ogni passaggio va ricordato con precisione e chiarezza per la durata intera della dimostrazione. […]
Affrontando una dimostrazione indiretta, si è obbligati a concentrare la propria attenzione continuamente sopra un'ipotesi falsa che andrebbe dimenticata e non sopra la tesi valida che sarebbe invece da tenere a mente.

- *IL SILLOGISMO EURISTICO* [11]

Colombo ed i suoi compagni, mentre veleggiavano verso occidente sopra un oceano sconosciuto, si sentirono incoraggiati alla vista di uno stormo di uccelli che parve loro un fausto auspicio, la promessa di una terra non troppo lontana.
Il tipo di ragionamento è degno di nota e merita di essere preso in seria considerazione anche se esso è fondato soltanto sopra un'indicazione plausibile e non su di un'assoluta certezza.

> *Quando ci si avvicina a terra spesso si vedono gli uccelli*
> *Ora si vedono numerosi uccelli*
> ___________________________
> *Quindi diviene più plausibile la supposizione che ci si stia avvicinando a terra*

Il sillogismo euristico dianzi introdotto può essere considerato come il più semplice ed il più comune schema di ragionamento plausibile. Esso ci fa ricordare un classico processo di dimostrazione detto "modus tollens di sillogismo ipotetico". Schematizziamo qui entrambi questi metodi:

sillogismo dimostrativo	*sillogismo euristico*
SE A VALE, ALLORA VALE B	SE A VALE, ALLORA VALE B
B FALSO	B VERO
___________________________	___________________________
A FALSO	A PIÙ CREDIBILE

---
[10] [1]: pagina 163

[11] [1]: pagina 177

- *ANALISI E SINTESI* [12]

Un uomo primitivo deve attraversare un torrente, ma non può tentare di passarlo a guado come fa di solito, perché la pioggia, caduta abbondantemente durante la notte, ha paurosamente innalzato il livello dell'acqua. Ecco che l'attraversamento del torrente diviene l'oggetto di un problema; "attraversare il torrente" è l'incognita x del problema iniziale. Quell'uomo si ricorda, ad un tratto, di avere superato altri corsi d'acqua camminando sul tronco di un albero caduto di traverso fra le due rive opposte; allora si guarda attorno, alla ricerca di un comodo albero abbattuto, che diviene la nuova incognita, y. Lungo i margini del torrente si elevano moltissime piante dal grosso fusto, ma nessuna di esse giace a terra sradicata; il nostro uomo primitivo, logicamente, vorrebbe abbatterne una. Come è possibile farne cadere una attraverso il torrente? Ecco una nuova idea, un nuovo problema , una nuova incognita: in che modo lanciare un tronco tra le due rive opposte?
Questa sequenza di idee potrebbe dirsi analisi, secondo la terminologia di Pappo. Se riuscirà a condurre a termine questa analisi, quell'uomo potrà essere considerato l'inventore del ponte e della passerella. Quale sarà poi la sintesi? La traduzione in atto delle idee. L'ultimo stadio della sintesi sarà camminare sul tronco gettato tra le acque del torrente.
Nell'analisi e nella sintesi intervengono gli stessi enti, gli stessi oggetti; essi fanno entrare in azione nell'analisi il cervello e nella sintesi i muscoli dell'uomo; l'analisi consta di pensieri, la sintesi delle azioni. C'è un'altra differenza: l'ordine degli uni è diverso dell'ordine degli altri. L'attraversamento del torrente è il desiderio primo da cui scaturisce l'analisi ed è l'ultima azione con cui si chiude la sintesi.
Negli "Elementi" di Euclide, i particolari dei procedimenti sono presentati in un rigido assetto sistematico che venne ammirato tanto quanto criticato.
Nell'esposizione euclidea tutti i procedimenti si svolgono in un medesimo senso: dai dati all'incognita nei "problemi di determinazione" e dall'ipotesi alla tesi nei "problemi di dimostrazione". L'introduzione di ogni elemento nuovo, punto, retta, ecc., deve essere giustificata dai dati o dall'esistenza di altri elementi rigorosamente introdotti in precedenti passaggi. Ogni affermazione nuova deve essere rigorosamente giustificata dall'ipotesi o da altre affermazioni rigorosamente dedotte in precedenti passaggi. Ogni elemento nuovo, ogni nuova affermazione sono esaminati appena si presentano per la prima volta e così sono analizzate una volta per tutte; ciò consente di focalizzare la propria attenzione unicamente sul passaggio che si sta considerando, senza bisogno né di tornare indietro né di guardare troppo innanzi. La tesi è proprio l'ultima affermazione di cui si deve provare la validità. Se ogni passaggio, l'ultimo compreso, è esatto, allora è tale anche l'intero processo.
Quando si intenda analizzare i particolari di un ragionamento, il metodo di Euclide è davvero consigliabile, senza riserve. Nessun procedimento è migliore di un'esposizione di tipo euclideo, soprattutto nel caso di un ragionamento originale, lungo e complicato che abbia il carattere di una scoperta e debba ormai essere verificato soltanto nei dettagli, essendo già abbozzato per sommi capi.
Ma il metodo di Euclide non può essere raccomandato senza riserve, quando si desideri esporre al lettore, oppure a un ascoltatore, un argomento del quale questi non abbia mai sentito parlare. L'esposizione euclidea, efficacissima per rendere ragione dei minimi particolari, non è altrettanto atta a mostrare il filo conduttore di un ragionamento. Il "lettore intelligente" riconoscerebbe facilmente l'esattezza di ogni passaggio, ma avvertirebbe anche una notevole difficoltà a comprendere la causa, lo scopo, il significato del ragionamento considerato nel suo complesso; infatti l'esposizione di Euclide spesso procede proprio in senso opposto a quello naturale del processo inventivo.
Nell'analisi, si avanza l'ipotesi che ciò che si chiede di fare sia già stato eseguito (ossia sia già stato determinato quello che si deve calcolare, oppure sia già stato dimostrato quello di cui si vuole provare la validità o la falsità). L'indagine procede dal risultato a cui si vuole pervenire; poi si risale via via da ogni deduzione a quella che la precede, finché, risalendo da deduzione a deduzione, si perviene a qualche informazione già nota oppure già dimostrata valida. Questo procedimento è detto ***analisi****, oppure* ***risoluzione a ritroso****, oppure* ***ragionamento regressivo****.*
Invece, nella sintesi, invertendo l'ordine dei passaggi del procedimento precedente, si parte dal punto in cui si è giunti alla fine dell'analisi, da ciò che risulta già noto oppure dimostrato valido. Di qui, si deriva il risultato che, nel processo d'analisi, implicava tale conclusione e si continua con deduzioni di questo tipo finché, ripetendo a ritroso gli stessi passaggi dianzi considerati, si giunge infine alla soluzione, oppure alla tesi, cercata.
Questo procedimento dicesi ***sintesi****, oppure* ***risoluzione costruttiva****, oppure* ***ragionamento progressivo***

[12] [1]: pagine 148 e 83

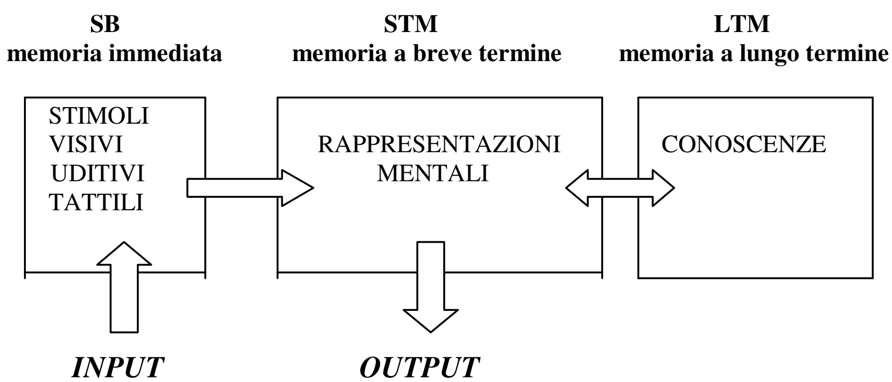
I FONDAMENTI PSICOLOGICI DEL PROBLEM-SOLVING

- *LA STRUTTURA DELLA MEMORIA* [13]

Il modello che ha avuto la maggiore conferma sperimentale per descrivere i processi di memorizzazione è stato proposto da Atkinson e Shiffrin (1968).

Le nostre esperienze – visive, uditive, tattili – sono registrate in locazioni di memoria sensorariali (*buffers*), che nella prassi sperimentale vengono definiti *memoria immediata.*
Un *buffer* sensoriale è chiamato anche *iconic memory* perché la maggior parte del suo contenuto è in forma di immagini. Esso può registrare una grande quantità di informazione, ma riesce a conservarla solo per un breve tempo (pochissimi secondi). Una parte di questa informazione è persa e una parte è trasmessa alla *memoria di lavoro (STM=Short Time Memory).*

Semplificando, si può dire che la *STM* è dove si realizza il pensiero. Essa riceve i suoi contenuti da due sorgenti: il *buffer* sensoriale *SB* e la *memoria a lungo termine LTM.*



L'aspetto più importante della *STM* è la sua limitata capacità. Le prime ricerche (Miller, 1956) hanno dimostrato che essa può trattenere e operare 7!2 raggruppamenti *(chunks)* di informazione.
Un *chunk* corrisponde ad una configurazione percettiva riconoscibile; ad esempio

- una parola scritta o orale (per un inglese)
- un ideogramma (per un giapponese)
- una posizione di arrocco di 6-7 pezzi (per un esperto di scacchi)

[13] [2] pagine 350-351

Un tipo di *chunk* aritmetico è un calcolo mentale: ad esempio 7x9 memorizzato come 6 decine e 3 unità è un *chunk*. Per questo una persona, senza speciali allenamenti, trova impossibile calcolare mentalmente il prodotto 637 x 829: infatti il numero di *chunks* (risultati parziali) che occorre memorizzare è troppo alto per la STM.

I limiti della memoria di lavoro impongono forti costrizioni sul tipo e sulla quantità di processi mentali che una persona può svolgere. Diventano quindi criticamente importanti le conoscenze di base contenute nella *LTM*.

La *LTM* è ancora oggi oggetto di studio; gli scienziati tuttavia concordano su un'architettura reticolare che permette l'accesso e l'uso delle conoscenze attraverso nodi e collegamenti. Essa è virtualmente priva di limiti per quanto riguarda la quantità di informazione ritenibile.
Ryle (1949) e Anderson (1976) hanno caratterizzato la conoscenza in due tipi (anche se la separazione non è netta):

- *knowing that=sapere che* (conoscenza dichiarativa)
- *knowing how=sapere come* (conoscenza procedurale)

Le ricerche sull'organizzazione della conoscenza in diversi campi hanno dimostrato l'importanza e l'influenza delle conoscenze di base, attraverso questi risultati:

- la competenza in un certo campo dipende dall'aver accesso a circa 50.000 *chunks* di conoscenze nella *LTM*
- la strategia di lavoro è in gran parte ottenuta da *chunks* di conoscenze schematiche del tipo *"in questa situazione faccio così"*.

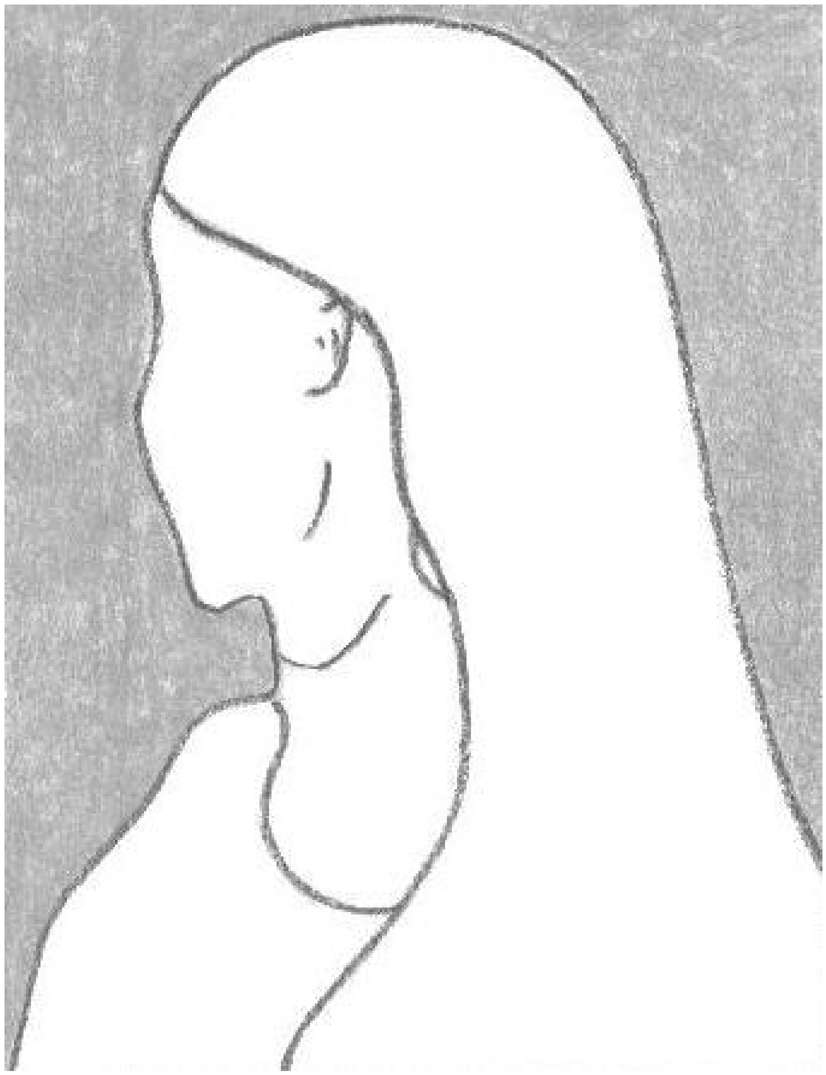
Tuttavia è importante non esagerare nell'uso di queste conoscenze schematiche, perché esse giocano il ruolo del vocabolario. La matematica che si focalizza sulle conoscenze schematiche non è sintonizzata con l'educazione matematica di una comunità. Lo schema *"quando vedi questo tipo di cose usa questa procedura"* può produrre una competenza superficiale, destinata perciò a commettere errori o ad essere dimenticata.

- *GLI STUDI PSICOLOGICI* [14]

Gli studi psicologici fondamentali per la nascita del problem solving derivano dalla *Gestaltpsychologie* (psicologia della forma) che si alimenta alla corrente filosofica del nichilismo. Molti ricercatori (chiamati *gestaltisti*) si interessano allo studio della percezione, non soltanto in campo visivo, acustico, tattile ma anche linguistico. Secondo queste teorie l'attività percettiva non si basa sull'organizzazione dei singoli elementi, ma sulla struttura globale del messaggio.
I seguenti tre esempi anticipano le caratteristiche psicologiche del problem solving: l'interpretazione, la decodificazione e la struttura del messaggio.

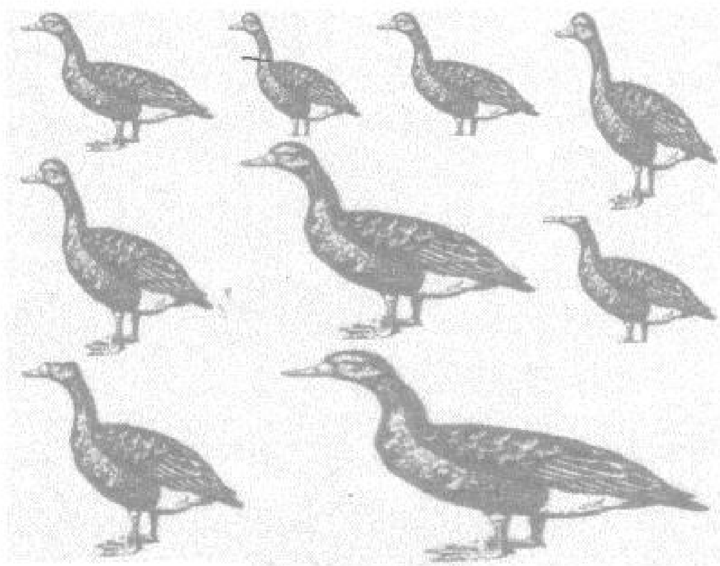
[14] [3] pagine 535-540 e 554

ESEMPIO 1 (interpretazione del messaggio)
La giovane e la vecchia



ESEMPIO 2 (decodificazione del messaggio)
Il problema delle oche

Passano due oche davanti a due oche,
passano due oche dietro a due oche,
passano due oche tra due oche.
Quante oche passano?



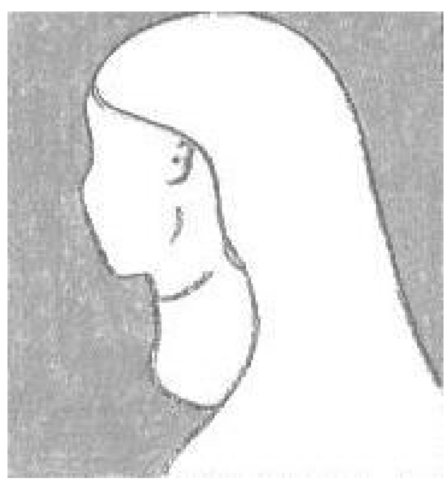
ESEMPIO 3 (struttura del messaggio)
Il problema del viaggiatore

Un signore lavora in città e ogni giorno arriva con lo stesso treno di mezzogiorno al suo paese dove l'autista l'incontra alla stazione. Un giorno finisce il suo lavoro prima e prende il treno precedente che arriva un'ora prima. Si incammina verso casa e lungo la strada incontra la macchina che si dirigeva alla stazione per esservi puntualmente alla solita ora. Quindi egli fa in macchina l'ultimo pezzo di strada verso casa. In questo modo arriva a casa 10 minuti prima del solito.
Quanto tempo ha camminato il signore?

Soluzione 1:

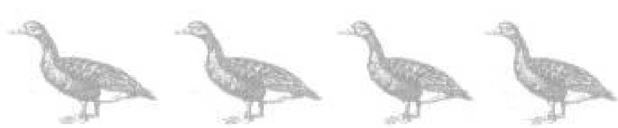
La giovane è vista di lato, con i capelli sulla spalla

La vecchia è vista di faccia: il naso corrisponde al profilo della giovane, l’occhio all’orecchio e il mento alla scollatura del vestito



Soluzione 2:

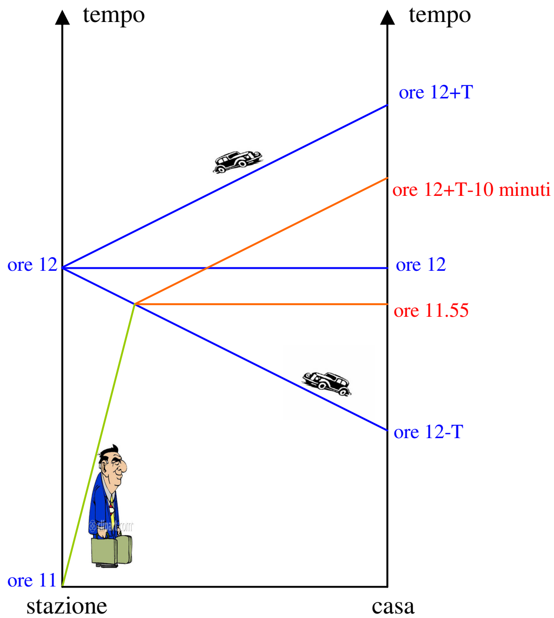
Passano 4 oche: 1 e 2 davanti a 3 e 4; 3 e 4 dietro a 1 e 2; 2 e 3 tra 1 e 4



1 2 3 4

Soluzione 3:

La risposta al problema può essere molto difficile se si affronta dal punto di vista del signore e molto facile invece dal punto di vista dell'autista.
Se ci mettiamo nei panni dell'autista, ragioniamo così: sono partito alla solita ora e sono arrivato 10 minuti prima, quindi ho risparmiato 5 minuti di strada all'andata e 5 al ritorno. Perciò ho incontrato il signore 5 minuti prima del solito, alle ore 11.55. Il signore ha pertanto percorso 55 minuti di strada a piedi.
Il ragionamento si può riconoscere nel seguente grafico:



Se ci mettiamo nei panni del viaggiatore, ragioniamo così: l'ora di arrivo a casa, data dalle 11 aumentata dei minuti trascorsi a piedi e dei minuti trascorsi in macchina, deve essere uguale all'ora di partenza dell'autista aumentata del doppio del tempo di viaggio, ed entrambe devono coincidere con la solita ora diminuita di 10 minuti.

T tempo impiegato normalmente (in macchina nel tratto s da casa alla stazione)
t tempo impiegato a piedi dal signore (nel tratto x)
T' tempo impiegato in macchina (nel tratto s-x)

ore 11+(t+T') minuti= ore12-T minuti+2T' minuti= ore12+(T-10) minuti

t=60+T'- T e T=T'+5 quindi t=60+T'-T'-5=55 minuti

LA PRATICA DIDATTICA

- *LE QUATTRO FASI DELLA RISOLUZIONE* [15]

  i. *si deve* ***comprendere*** *il problema; è necessario conoscere chiaramente cosa sia richiesto.*
  ii. *si devono scoprire i legami che intercedono tra le varie informazioni, fra ciò che si cerca ed i dati, per rendersi conto del tipo di risoluzione e compilare un* ***piano*** *conveniente.*
  iii. *si procede allo* ***sviluppo del piano***
  iv. *bisogna* ***esaminare attentamente*** *il risultato ottenuto e procedere alla sua verifica ed alla sua discussione.*

i. Sulla comprensione del problema

Lo studente dovrebbe capire il problema e, di più, dovrebbe desiderare di conoscerne la soluzione. Non è sempre tutta colpa dell'alunno se questa comprensione e questo desiderio mancano; i problemi dovrebbero essere scelti con cura, né troppo difficili, né troppo facili, semplici ed interessanti; e spesso essi dovrebbero essere rappresentati in forma gradevole, piana ed atta a risvegliare la curiosità dei giovani.

ii. Sulla compilazione di un piano

La compilazione di un piano è l'impresa più ardua. … Il miglior aiuto che un insegnante possa dare ai suoi allievi consiste nell'ispirare loro delle brillanti intuizioni mediante un'assistenza discreta, mediante domande e suggerimenti:

E' noto un problema connesso con questo?
Qual è l'incognita?
Si rifletta sull'incognita.
Ci si sforzi di ricordare qualche problema precedentemente risolto avente la stessa incognita oppure un'incognita analoga.
Si può enunciare il problema in altra forma?
Se non si riesce a risolvere il problema proposto, si tenti di risolvere prima qualche problema connesso con questo.
Si è fatto uso di tutti i dati?
E' stata considerata l'intera condizione?

Nell'intenzione più sincera di aiutare i suoi alunni l'insegnante può porre domande controproducenti: l'alunno potrà anche comprendere il suggerimento, ma ai suoi occhi assumerà l'effetto di un fatto sorprendente, ma innaturale, come il rinvenimento di un coniglio entro il cappello di un prestigiatore.

iii. Sullo sviluppo del piano

[15] [1]: pagine 24-33

*L'insegnante farà bene ad insistere affinché gli studenti procedano alla **verifica di ogni passaggio.** Dell'esattezza di un passaggio ci si può convincere o "intuitivamente" o "formalmente". Comunque è indispensabile che l'alunno sia seriamente convinto dell'esattezza di ciascun passaggio.*
*L'**indagine intuitiva** e la **verifica formale** sono due modi distinti di convincersi delle verità paragonabili alla percezione di un oggetto materiale fornita da due sensi diversi, quali la vista e il tatto.*
L'indagine intuitiva può portare più innanzi della prova formale. Ogni studente di vivace intelligenza, anche se sprovvisto di una sistematica conoscenza della geometria solida, può vedere che due rette parallele ad una stessa retta sono parallele tra loro (le tre rette non sono necessariamente complanari) non appena egli abbia compreso il significato dei vocaboli. Eppure la dimostrazione di questa proposizione, così come è svolta nel libro XI degli "Elementi" di Euclide, esige una profonda, accurata e specifica preparazione.
A sua volta la manipolazione formale di regole di logica e di formule algebriche può condurre più lontano dell'intuizione. Quasi tutti vedono subito che tre rette prese a caso sopra un piano dividono questo in sette regioni, ma pochi sono in grado di riconoscere altrettanto speditamente, sia pure concentrando intensamente la propria intenzione sull'enunciato, che cinque piani presi a caso dividono lo spazio in ventisei regioni: tuttavia ciò segue da una dimostrazione rigorosa, che però non è né lunga né difficile.
Dimostrare formalmente ciò che si vede intuitivamente e vedere intuitivamente ciò che è dimostrato formalmente costituiscono un corroborante esercizio mentale; purtroppo in classe non resta mai abbastanza tempo per questo.

iv. Sulla verifica

Nessun problema di matematica può essere considerato definitivamente chiuso. Resta sempre qualcosa da dire ancora sopra di esso; con uno studio e un'applicazione accurati, si può perfezionare qualunque risoluzione e, in ogni caso, si può sempre giungere ad una più profonda comprensione del risultato.

Poiché i problemi scaturiscono da esigenze pratiche o da una innata curiosità, è probabile che spesso il confronto dei risultati con grandezze concrete venga omesso. Ma ogni insegnante sa che gli studenti accettano con disinvoltura i risultati più sbalorditivi. Alcuni ragazzi non si impressionano affatto se ottengono come soluzione che una barca è lunga 4 km e che l'età del capitano, che si sa tra l'altro avere dei nipoti, è di 8 anni e 2 mesi. Tale indifferenza però non è indice di stupidità: essa rivela piuttosto che i problemi inventati non interessano gli alunni.

- *L'ABILITA' DI RISOLVERE I PROBLEMI* [16]

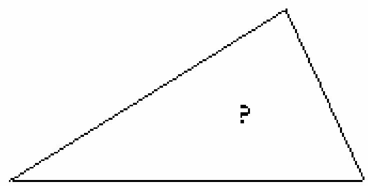
Risolvere i problemi è una questione di abilità vera e propria come, permettetemi il paragone, il nuotare. Qualunque abilità pratica può essere acquisita con l'imitazione e l'esercizio. Sforzandosi di imparare a nuotare si imitano i gesti e gli sgambettii di coloro che riescono a stare a galla nell'acqua e, a poco a poco, si impara a nuotare … nuotando. Per imparare a risolvere i problemi, è necessario osservare ed imitare come vi riescono altre persone ed infine si riesce a risolvere i problemi … risolvendoli.

[16] [1]: pagina 24

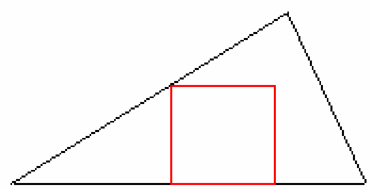
IL SECONDO ESEMPIO DI PROBLEM SOLVING[17]

QUADRATO INSCRITTO IN UN TRIANGOLO

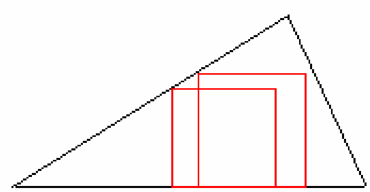
In un triangolo assegnato inscrivere un quadrato avente due vertici sulla base e ciascuno degli altri due vertici su un lato del triangolo.



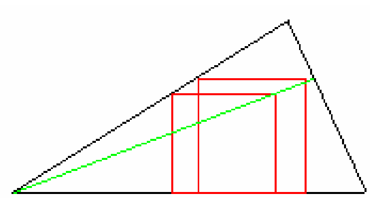
Lo studente viene invitato a costruire il quadrato soddisfacendo solo in parte la condizione: tre vertici si trovano sui lati, il quarto no.



Lo studente viene invitato a fare un altro tentativo: il quarto vertice si avvicina al lato.



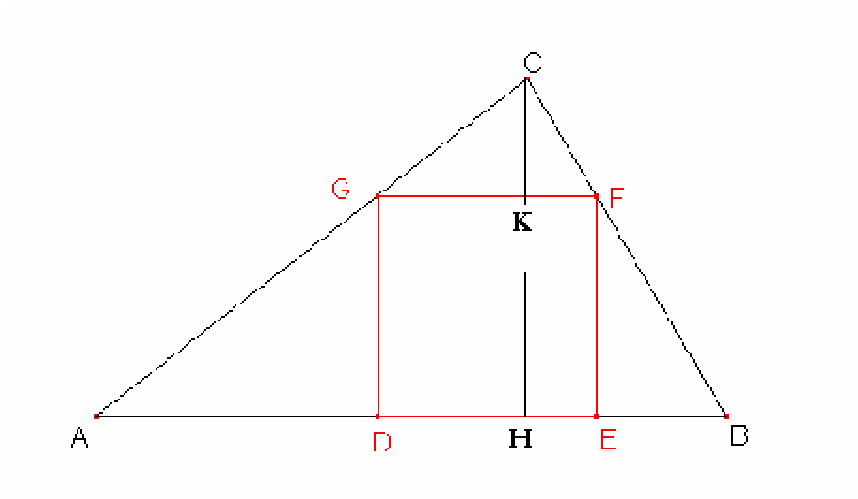
Lo studente viene invitato a congetturare il luogo descritto dal quarto vertice dei quadrati: la risposta (che occorrerà dimostrare) è un segmento nel cui estremo si trova il quarto vertice cercato.



[17] [1]: pagina 40

Dimostrazione per analisi.

Supponiamo il problema risolto. DEFG sia il quadrato richiesto.



I triangoli ABC e GFC sono simili, pertanto le basi AB e GF sono proporzionali alle altezze CH e CK.

$$AB:CH=GF:CK$$

ponendo AB=a, CH=h, GF=KH=x

$$a:h=x:(h-x)$$

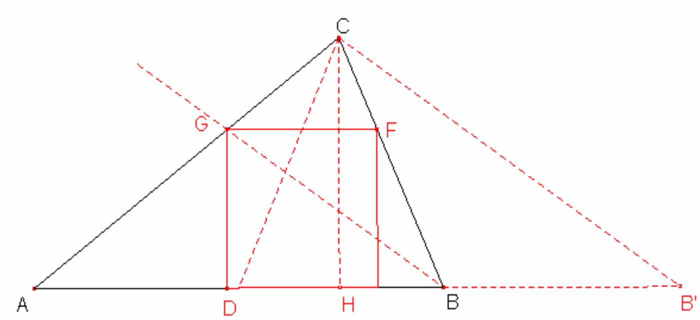
applicando il comporre

$$a:(a+h)=x:h$$

o anche

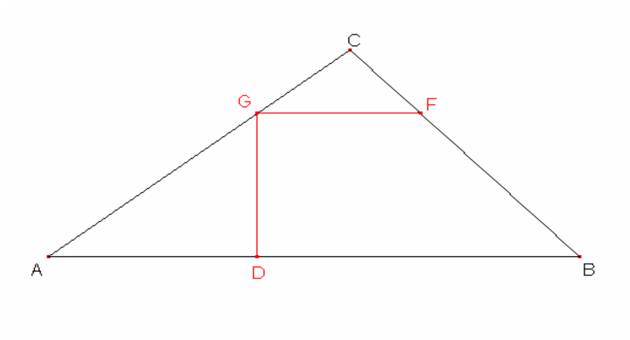
$$\boldsymbol{a:x=(a+h):h}$$

Questa ultima proporzione permette di costruire il punto G: si prolunga la base AB del segmento BB'=CH e si ottiene il triangolo AB'C di base a+h e altezza h; tracciando da B la parallela a B'C si ottiene il triangolo ABG (simile ad AB'C) di base a e altezza x.



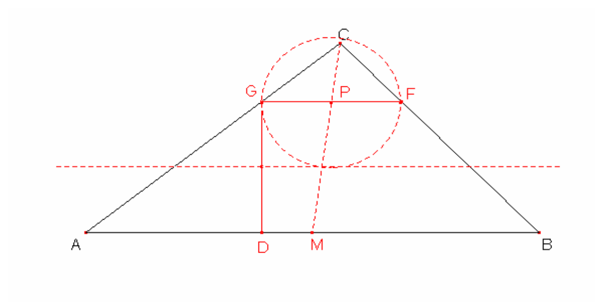
Dimostrazione per sintesi.

Per ottenere il quadrato DEFG inscritto in ABC occorre determinare la corda GF, parallela ad AB, tale che la sua distanza da AB sia pari alla sua lunghezza (GF=GD).



A questo scopo si possono fare le seguenti due osservazioni:

1. ***Il punto medio P di GF appartiene alla mediana CM. Infatti risultano simili le coppie di triangoli AMC, GPC e MBC,PFC***
2. GF è il diametro della circonferenza di centro P e raggio ½GD



Spostando P sulla mediana CM e costruendo la circonferenza di centro P e raggio ½PP', gli estremi G, F del suo diametro parallelo ad AB si muovono percorrendo i segmenti MI e ML rispettivamente. Infatti quando P coincide con M la distanza PP' è nulla e la circonferenza è il punto M, quando P coincide con C la circonferenza ha diametro IL=CH, e nelle altre posizioni si conserva la similitudine delle coppie di triangoli MCI,MPG e MCL,MPF.
Dunque i punti G ed F si ottengono come intersezione dei segmenti MI e ML rispettivamente con i lati AC e BC del triangolo dato.