Due cose meravigliose: fare ed insegnare geometria

Genova, 10 maggio 2011

1. Quello dell'insegnante è un mestiere bellissimo ma duro e difficile. E non si creda che sia più difficile insegnare nell'Università che nelle scuole inferiori. Particolarmente impegnativo è ad esempio l'insegnamento nella Scuola Primaria. Non soltanto il Maestro elementare deve possedere una buona cultura generale ed essere in grado quindi di intrattenere i bambini sugli argomenti più disparati, cercando di non annoiarli ed anzi di divertirli, anche con giochi e con aneddoti "matematici". Ad esempio il bambino delle prime classi elementari potrebbe essere sbalordito apprendendo che un suo coetaneo calcolò in pochi secondi la somma di cento numeri di una progressione aritmetica. Quel bambino prodigio era Carlo Federico Gauss, ed era destinato a diventare uno dei più grandi matematici di tutti i tempi [1].

[1] Lo stesso Gauss, da vecchio, si compiaceva di questa sua prodezza giovanile, quando parlava con gli amici delle sue prime esperienze scolatiche. Iniziò a frequentare la scuola a sette anni. Il maestro Buttner era severissimo, terrorizzava i bambini, e li tormentava con delle punizioni assurde. Una di queste punizioni fu appunto quella di calcolare la somma di cento numeri di quattro cifre. Il calcolo poteva richiedere parecchie ore di lavoro, ma non per Gauss. Il maestro, vedendo che egli aveva riposto la penna dopo mezzo minuto, pensò subito che non fosse capace di fare le addizioni; e grande fu la sua meraviglia nel constatare che l'unico numero che Gauss aveva scritto era il risultato esatto (che Buttner conosceva perché i numeri erano in progressione aritmetica). Dopo questo episodio Buttner divenne più umano, specialmente con Gauss; e rendendosi conto che, per quanto riguarda l'aritmetica, non avrebbe potuto insegnargli più nulla, lo affidò ad un giovane maestro (Johan Martin Bartles, diciasettenne) che aveva il compito di insegnare a scrivere ai più piccoli, ma che era noto per la sua passione per la matematica. Bartles e Gauss divennero amici, amicizia che durò fino alla morte di Bartles. Bartles, che era in relazione con molte personalità influenti, fece in modo che Gauss fosse presentato al duca Ferdinando di Brunswich.[Alcuni storici affermano che fu lo stesso Buttner a raccomandare Gauss al duca.]; e fu proprio grazie alla generosità del duca Ferdinando che Gauss poté entrare nel Collegio Caroliniano, ove rimase nel triennio 1792-1795. Nel 1794 Gauss, appena diciasettenne, dimostrò il *Theorema Aureum,* che Eulero aveva previsto e che Legendre non era riuscito a provare. Questo teorema , detto *legge di reciprocità quadratica,* afferma che *se p e q sono primi, le due congruenze $x^2 \equiv q(mod p)$ e $x^2 \equiv p(mod q)$ sono insieme risolubili o no, a meno che p e q divisi per quattro abbiano resto 3, nel qual caso una sola delle due ammette soluzioni.*

Sempre grazie alla generosità del duca di Brunswich, Gauss poté frequentare l'Università di Gottinga e fu lì che presero forma definitiva le famose *Disquisitiones Arthmeticae.*

Tra i contributi di Gauss alla Geometria, mi limito a ricordare la questione dei poligoni

Il maestro ha inoltre il compito di enorme importanza e responsabilità di provvedere alla educazione dei giovani allievi. Egli deve fare ciò che oggi la famiglia spesso non fa: insegnare il rispetto per sé e per gli altri, lo spirito di collaborazione, l'amore per il prossimo, e l'amore per il proprio paese, e deve fare acquistare all'allievo la consapevolezza che senza costante applicazione non si raggiunge alcuna meta.

Un buon insegnante deve saper scorgere in ogni piccolo allievo le possibilità nascoste che sono in lui ed aiutarlo a cavarle fuori, in modo che il bambino provi la gioia delle sue conquiste. E ciò facendo non trascuri i bambini più intelligenti per badare soltanto ai mediocri; i migliori vanno spinti, anche, se occorre, con cure particolari a parte.

L'obbligo di frequentare la scuola fino a quattordici anni è stato certamente una grande conquista sociale; ma questa conquista non deve comportare l'abbassamento dell'insegnamento al livello dei mediocri, fatto che purtroppo avviene in gran parte delle nostre scuole, all'insegna di una mal interpretata uguaglianza.

Il maestro che ama gli scolari deve pretendere che essi lo rispettino, ed essere moderatamente severo.[2]

---

regolari costruibili con riga e compasso. Gauss era così orgoglioso della sua costruzione dell'eptadecametro regolare che avrebbe voluto che sulla sua tomba venisse inciso un poligono regolare di 17 lati; ma nessun scalpellino riuscì a scolpire un eptadecametro che non si confondesse con un cerchio.

[2]All'inizio del secolo XIX e specialmente nel Nord d'Europa, i metodi di insegnamento erano anche troppo energici, e le punizioni corporali erano all'ordine del giorno. Già ho accennato al maestro Buttner; un caso ancora più clamoroso capitò in una scuola di Findoe, in Norvegia, dove un bambino morì a causa delle percosse ricevute da un maestro brutale. Il maestro fu cacciato dalla scuola. Il suo successore Berndt Michael Holmboë scoprì subito l'eccezionale predisposizione per la matematica dell'allievo Niels Henrik Abel. Holmboë si rese presto conto che Abel, allora quindicenne, era già maturo per leggere le opere di Newton, Eulero, Lagrange e Gauss. Qualche anno più tardi, quando gli fu chiesto come avesse fatto a diventare in così poco tempo un grande matematico, Abel rispose: "Grazie ad Holmboë ho studiato i maestri e non i loro scolari".

L'interesse di Abel per la matematica iniziò quando Egli aveva già quindici anni, ma nessuno fu più rapido di lui nel progredire, come se avesse il presentimento che gli rimaneva poco tempo: quando morì aveva infatti solo ventisette anni. Il primo successo di Abel fu la dimostrazione che una generica equazione di quinto grado non può essere risolta per radicali. Lo studio, che Abel aveva fatto stampare a sue spese, capitò nelle mani di Gauss, che - convinto che nessuno avrebbe potuto fare ciò che lui stesso non era riuscito a fare - non si degnò neppure di leggerlo e lo cestinò affermando, come Abel venne a sapere da un testimone degno di fede: "sarà una delle solite assurdità". Da quel momento Abel detestò Gauss, ed abbandonò il proposito di recarsi a Gottinga per incontrarlo. Si recò invece a Berlino ove ebbe la fortuna di incontrare Augusto Leopoldo Crelle. Anche oggi la fama di Crelle è sopratutto dovuta alla rivista matematica da lui fondata (il *Journal de Crelle*) i cui tre primi volumi contengono ventidue Memorie di Abel.

Se Gauss commise il grave errore di trascurare il primo importante lavoro di Abel, un peccato

Anche se la storia della matematica non può registrare nulla che si avvicini alla precocità di Gauss[3] è sorprendente la velocità di pensiero di un bambino.

La curiosità, lo spirito di osservazione, l'intuito e la fantasia sono qualità fondamentali per un matematico; e sono qualità che sopratutto il bambino possiede. Ed è proprio la Geometria che, più di ogni altra disciplina, ne ha bisiogno e può valorizzarle.

Un disegno ben fatto (il maestro deve anche saper disegnare!) può condurre il bambino a scoprire spontaneamente delle importanti verità.

Prendiamo ad esempio il teorema di Pitagora, senza dubbio uno dei più importanti teoremi della matematica.

Non si contano i geometri dilettanti che nel passar dei secoli ne hanno dato una dimostrazione. Perfino un presidente degli Stati Uniti[4] ne escogitò una.

Non si sa chi per primo lo abbia provato, forse Euclide. È invece probabile che Pitagora vi sia giunto attraverso una improvvisa intuizione. Anche un bambino, che chiamerò Pippo, potrebbe da solo trovarne una: basta che il maestro gli mostri un triangolo rettangolo T insieme ai quadrati costruiti sui tre lati, e gli suggerisca di aggiungere nel disegno l'altezza relativa all'ipotenusa. Pippo osserva che T ed i due triangoli T_1, T_2 in cui T vien suddiviso hanno la stessa *forma* (cioè

---

veramente imperdonabile fu quello commesso da Cauchy, sempre nei confronti di Abel. Cauchy, al quale fu affidata, per presentarla all'Accademia delle Scienze di Parigi, la Memoria *Una proprietà generale di una classe estesissima di funzioni trascendenti* che Lagrange definì *monumentum aere perennius* e che secondo Hermite darà da lavorare ai matematici per cinquecento anni, si degnò appena di dare un'occhiata al manoscritto, che poi fu presentato all'Accademia da Hachette il 10 ottobre 1829, sei mesi dopo la morte di Abel. Cauchy e Legendre furono incaricati di esaminarlo e di stendere il rapporto. Legendre avena 79 anni; ne accennò con Jacobi (con il quale era da tempo in corrispondenza) lamentando il fatto che il manoscritto di Abel era illeggibile per via della pessima calligrafia e dell'inchiostro troppo chiaro. Cauchy che aveva 39 anni, ed era al massimo della maturità, pensava solo a se stesso: portò a casa il manoscritto e se ne dimenticò. In una lettera a Legendre del 14 marzo 1829, Jacobi scrive: "Che scoperta meravigliosa quella del Sig. Abel. Non si è mai visto nulla di simile! Come è possibile che sia sfuggita all'attenzione dell'Accademia la scoperta matematica più importante del secolo, comunicata all'Accademia già da due anni ?". Il console di Norvegia fece un'istanza perché si ritrovasse il manoscritto, e Cauchy lo snidò nel 1830. Consegnato alle stampe, l'editore od il tipografo od entrambi riuscirono a perdere il prezioso manoscritto prima della correzione delle bozze. Fu finalmente stampato nel 1841.

C'è da chiedersi se tutto ciò sia stato veramente casuale.

[3]Non aveva ancora tre anni quando accortosi che il padre sbagliava nel fare i conti per le buste-paga degli operai della fornace di cui era il custode, gli indicò l'errore e gli suggerì la correzione.

[4]James Arthur Garfielfd, che fu Presidente degli U.S.A nel 1881 (per soli sei mesi perché fu subito assassinato).

sono simili) e non appena abbia posto l'attenzione sul fatto, peraltro ovvio, che il triangolo T è la somma degli altri due, gli basterà una semplice occhiata per concludere che il quadrato "più grosso" è *per forza* la somma degli altri due.[5]

È ovvio che per conquistare una qualunque verità, Pippo può aver bisogno di qualche aiuto; il maestro però non dimentichi che il bambino vuol "fare da solo", e si irrita se viene aiutato. Un buon maestro deve saper aiutare senza che l'allievo se ne accorga.

2. Molto meno difficile è il compito dell'insegnante nelle Scuole Secondarie. Ancora la geometria deve essere in stretta connessione con l'intuizione; ciò vuol dire scorgere una verità spontaneamente, senza ragionamenti né esperienze, come frutto di ragionamenti inconsci. Con quale mezzo, se non con l'intuizione, si sceglierebbe la via giusta per giungere ad un risultato fra le infinite possibili catene di deduzioni derivanti dalle premesse? Ecco cosa scrive Guido Castelnuovo:*" Col dimostrare logicamente ciò che è evidente all'intuizione, si porta un doppio danno, perché si screditano insieme il ragionamento, di cui non è quello l'ufficio, e l'intuizione, di cui si disconosce l'immenso valore. Si ha un bel dire che l'intuizione può condurre all'errore; sarà, ma l'intuizione fornisce pure la principale, se non l'unica, guida alla scoperta della verità. Dovremo forse rinunciare alla verità per paura dell'errore?"*

Solo quando sono agli ultimi anni della scuola secondaria i giovani possono vedere le varie parti della matematica elementare trattate razionalmente, cioè partendo da idee e proposizioni primitive ed operando su di esse con la logica. Così impareranno non solo a dimostrare le verità già note, ma anche a scoprirne delle nuove ed a risolvere da sé i problemi, il che spesso non si fa con le sole trasformazioni logiche, ma necessariamente anche con l'intuizione.

Bisogna badar bene ai concetti ed alle proposizioni primitive. In un primo insegnamento non occorre enumerarli tutti. In un insegnamento più elevato si potrà anche introdurli man mano occorrano. Ma bisognerà badare che siano tutti intuitivi; e le definizioni siano chiare e soddisfacenti. Diceva Poincaré: *In cosa consiste una definizione soddisfacente? Per il filosofo e lo studioso, una definizione è soddisfacente solo se è pertinente alle cose che definisce. Ecco quanto richiede la logica. Ma nell'insegnamento non è così : una definizione è soddisfacente solo se lo studente la comprende.*

[5]Formalmente: se Q, Q_1 e Q_2 sono i tre quadrati, si ha $T = T_1 + T_2$, $\frac{Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$; e quindi $Q = Q_1 + Q_2$.

Almeno in un primo tempo non si esiga l'indipendenza delle proposizioni che si assumono come primitive. Definire al ragazzo con un lungo discorso delle cose che egli crede già di conoscere è annoiarlo. Si aspetti a fare questa riduzione nelle idee primitive quando egli sia più maturo e possa capirne lo scopo. Stando al punto di vista esclusivamente logico si dovrebbero bandire dall'insegnamento elementare le parole *linea* e *curva* , perché non si hanno elementi per definirle: perciò si ammetta il concetto primitivo di linea. Non si deve vietare al giovane di parlare di *lunghezza*, di *area* di *volume,* nozioni di cui egli ha dall'esperienza un concetto intuitivo.

Quanto ai *postulati,* nelle trattazioni moderne se ne incontrano di quelli che son tanto ovvi da far stupire che meritino di prenderne nota. Quando occorrano nei ragionamenti si adoperino senz'altro. Tutto ciò non impedisce che si proceda con *rigore.* L'abbondare dell'uso dell'intuizione (più di quanto non sarebbe indispensabile dal punto di vista soltanto logico) non è mancanza di rigore, come taluno mostra di credere, mentre l'abuso di deduzioni logiche rende l'insegnamento noioso. Dal punto di vista didattico può essere utile rinunciare al rigore, dando in aula degli abbozzi di ragionamenti invece, o prima, dei veri ragionamenti. Un tale abbozzo, o dimostrazione non rigorosa, potrà insegnare in che modo si fanno le scoperte e come si lavora con l'intuizione; oppure servirà a dare un'idea più sintetica, più facile da ricordare, della dimostrazione rigorosa che verrà eventualmente esposta in un secondo tempo. Basta che si avvertano gli studenti che la dimostrazione esposta non è completa e talvolta si mostri dov'è la lacuna.

Ad un giovane che gli chiese che cosa avrebbe dovuto fare per affrontare al meglio lo studio della matematica, André Weil, uno dei più grandi matematici del secolo scorso, consigliò di studiare il latino.

Il latino abitua infatti al rigore linguistico ed al ragionamento logico, compito purtroppo disatteso dalla matematica che spesso nelle nostre scuole secondarie (per fortuna non in tutte) è ridotta a calcolo algebrico ed a manipolazione di complicate formule di algebra e di trigonometria, delle quali lo studente non riesce a vedere l'interesse (che spesso non c'è). Viene sopratutto trascurata la geometria euclidea, in particolare la geometria dello spazio. Colpa anche dei programmi, e di molti testi nei quali troppe pagine sono scritte per non dire nulla.

Ed è quindi naturale che i giovani, in gran maggioranza, preferiscano le materie umanistiche e non amino affatto la matematica (e non soltanto gli allievi del liceo classico che personalmente ritengo la migliore scuola per chi vorrà fare il matematico). Questo non è soltanto un fenomenno di questi tempi, come la storia della matematica insegna.[6]

Ecco perché la Cultura è solitamente associata alle Scienze Umane e manca una "Cultura Scientifica". Una buona parte di colpa è certamente dovuta a coloro che, per quanto riguarda la Scuola, ne hanno effettuato le scelte di indirizzo.

Ciò comunque non è limitato all'Italia, come testimonia la seguente affermazione di Jean Dieudonné: *si fa fatica a capire l'astio che esplode nei pamphlet che, di tanto in tanto, attaccano ancora la matematica: Esistono tante discipline che non hanno certamente alcuna "utilità" e contro le quali nessuno si solleva".*

Perché allora nelle ultime classi dei licei il docente non dedica una parte delle sue lezioni a far capire cosa sia effettivamente la Matematica, in modo che le future scelte dei ragazzi siano più consapevoli? Ci sono molti argomenti che potrebbero interessare il giovane ed appagare la sua curiosità, per i quali l'insegnante potrebbe

[6]Consideriamo ad esempio il caso di Evaristo Galois. Dal padre, uomo colto ed amante della libertà ereditò l'odio per i tiranni e per i vili; dalla madre ereditò la passione per gli studi classici. A dodici anni, nel 1823, entrò nel liceo Louis-Grand di Parigi. Grazie all'istruzione impartitagli dalla madre andava benissimo nelle materie umanistiche, ma gli studi lo annoiavano e riteneva i libri di testo stupidi e noiosi ad eccezione di quello di geometria (le *Lezioni di Geometria* di Legendre). In particolare odiava l'algebra perché il testo di algebra era un pessimo manuale scolastico. Perciò fu bocciato e dovette ripetere un anno. Incurante delle beffe del suo professore, scelse di studiare la matematica sulle opere di Lagrange e di Abel. Trascurò gli altri studi ed a 16 anni si presentò senza preparazione all'esame si ammissione alla Scuola Politecnica, pensando che il suo genio (di cui era consapevole) fosse riconosciuto. Ma fu bocciato.

Nel 1828 (aveva 17 anni) ebbe finalmente un professore che si accorse di avere tra le mani un nuovo Abel. In quell'anno Galois scrisse uma Memoria da sottoporre all'Accademia. Cauchy, sempre lui, perse il manoscritto. Nacque così in Galois il disprezzo per le Accademie e gli Accademici.

Nel 1830 aveva preparato una nuova Memoria, per concorrere al Gran Premio di Matematica. Il segretario dell'Accademia morì appena portò a casa il manoscritto. Non se ne seppe più nulla. Disgustato della società, Galois si gettò in politica parteggiando per i repubblicani. Come elemento pericoloso fu arrestato (senza alcun motivo) il 14 luglio 1831 mentre i repubblicani stavano organizzando una manifestazione contro Luigi Filippo; fu liberato il 29 marzo 1832.

Non si sa cosa accadde il 29 maggio quando in una *lettera a tutti i repubblicani* pregò i patrioti e gli amici di non rimproverarlo se non morirà per la patria. Colpito al ventre in duello (il 30 maggio) fu abbandonato sul terreno. Un contadino che passava lo trasportò all'ospedale di Cochin. Il suo fratello minore giunse all'alba del 31 maggio 1832, appena in tempo per vederlo morire.

Durante la notte tra il 29 ed il 30 maggio scrisse al suo miglior amico Auguste Chevalier una lettera con il riassunto delle sue nuove scoperte, concludendo: "Tu pregherai Jacobi e Gauss di dare il loro parere non sulla verità ma sull'importanza di quanto scrivo."

Sotterrato in una fossa comune nel Cimitero Sud, di lui non resta traccia. Le sue opere complete riempiono 60 pagine.

utilmente collaborare con colleghi di altre materie, in particolare la filosofia e la storia. Ad esempio la critica dei principi della Geometria, i fondamenti di Logica Matematica, e sopratutto la Storia della Matematica.

Scriveva Felice Klein: *La matematica, ed in particolare la Geometria, in contrasto con le altre Scienze, non si fonda su un solo periodo della storia dell'uomo, ma ha accompagnato lo sviluppo della cultura in tutti i suoi stadi. Essa è altrettanto frammista alla cultura greca quanto lo è nei confronti dei più recenti problemi della tecnica. Essa non solo porge una mano alle Scienze Naturali in progresso, ma partecipa nel contempo alle indagini astratte dei logici e dei filosofi.*

Ho già detto che nei primi anni di scuola non è necessario preoccuparsi della indipendenza dei postulati; ma più avanti la cosa potrà essere ripresa. Ed il giovane troverebbe certamente interessante il fatto che la tanto dibattuta questione sull'indipendenza del quinto postulato di Euclide dagli altri quattro[7] abbia aperto la strada ad altri tipi di geometrie. La difficoltà nascosta nel quinto postulato che, più a stento degli altri, si presta ad essere accettato come tale, a causa del suo minor carattere di evidenza, fu certo rilevata dai greci e probabilmente dallo stesso Euclide. Lo prova la distribuzione della materia nel primo libro degli *Elementi* nel quale le prime 28 proposizioni sono indipendenti da quel postulato; lo prova anche il fatto di aver considerato due volte il teorema dell'angolo esterno di un triangolo, prima per dimostrare (senza valersi del postulato V) che esso è maggiore di ciascuno dei due angoli interni non adiacenti, poi che ne è la somma. I ragazzi troverebbero certamente molto interessante il dibattito millenario che ne è scatu-

[7] I cinque postulati del primo libro degli *Elementi* di Euclide sono:

1. tra due punti qualsiasi è possibile tracciare una ed una sola retta;
2. si può prolungare la retta oltre i due punti illimitatamente;
3. dati un punto ed una lunghezza è possibile tracciare un cerchio;
4. tutti gli angoli retti sono uguali;
5. se una retta, incontrando due rette [sottinteso, di uno stesso piano] determina dalla stessa parte due angoli [coniugati interni] la cui somma è minore di due retti, le due rette, prolungate all'infinito, si incontrano dalla parte ove la somma degli angoli coniugati interni è minore di due retti.

Nei testi usati attualmente nelle scuole, il quinto postulato è generalmente sostituito dall'assioma di Playfair che afferma che per un punto P è possibile tracciare una ed una sola retta parallela ad retta data. Esso che implica il postulato V, ma non ne è implicato. [Nella geometria ellittica due rette si incontrano sempre; in esse il postulato di Euclide è ovviamente vero, mentre è falso quello di Playfair].

rito. Il giusto modo di porre la questione non è già chiedere di quell'enunciato una dimostrazione che lo faccia discendere dai precedenti, ma invece chiedere se una tale dimostrazione si possa o non si possa dare: *On doit donner au problème une forme telle qu'il soit toujour possible de le resoudre* (N. H. Abel) . La questione trovò la sua soluzione con C. F. Gauss e sopratutto con N. J. Lobacefski che nel 1829-30 pubblicò una Memoria in cui è svolta la Geometria non Euclidea. W. K. Clifford paragona Lobacefski a Copernico, per l'importanza filosofica della sua scoperta.

Un altro interessante esempio adatto ai ragazzi del Liceo è offerto dal teorema di Desargues sui triangoli omologici, teorema fondamentale per la Geometria Proiettiva. L'enunciato è molto semplice (può capirlo anche un bambino delle scuole elementari) e la dimostrazione non offre alcuna difficoltà per chi abbia le prime nozioni di geometria euclidea dello spazio; inoltre esso è veramente evidente per chi abbia un minimo di intuizione spaziale. Si tratta sostanzialmente del fatto che dati due piani distinti α, β, se due rette, appartenenti una ad α l'altra a β sono incidenti, il punto ad esse comune deve appartenere alla retta comune ai due piani[8]. Ciò che importa far notare agli allievi è che mentre per l'enunciato occorrono soltanto i postulati della geometria euclidea del piano, questi postulati non bastano per dimostrarlo. Questo fatto si può provare costruendo un esempio di "piano non arguesiano" (cioè un insieme di oggetti, che chiameremo punti, e dei sottoinsiemi che diremo rette, nel quale insieme valgano tutti i postulati delle geometria euclidea, ma non valga il teorema di Desargues). Abbiamo così un teorema di geometria del piano che non si può dimostrare senza uscire dal piano. E perché dunque non ci saranno fatti di geometria spaziale che pur essendo palesemente veri, abbiano bisogno, per essere dimostrati, che si postuli l'esistenza di un punto non appartenente allo spazio fisico?

Gli esempi si potrebbero moltiplicare.

Tutto ciò conduce subito alla necessità che il docente allarghi la sua cultura che deve andare molto al di là di quanto dovrà effettivamete insegnare. Egli dovrà essere in grado di rispondere alle domande dei giovani; e non è del tutto

[8]Si disegnino nel piano tre rette a, b, c uscenti da un punto O, e due rette r, s non passanti per O. Se A, B, C sono i punti in cui r interseca a, b, c, ed A', B', C' sono le intersezioni di s con le stesse rette a, b, c, i tre punti $AB' \cap A'B$, $AC' \cap A'C$, $BC' \cap B'C$ sono allineati. Per provarlo pensiamo la figura nello spazio, e supponiamo che O non appartenga al piano ab. Le due rette $AB', A'B$ che sono complanari (appartenendo al piano ab) si incontrino in L. Analogamete, sia M il punto comune alle rette $AC', A'C$. La retta $p = LM$ appartiene ai due piani $\alpha = AB'C', \beta = A'BC$ e quindi è la loro intersezione. Pertanto le due rette r, s che sono incidenti e giacciono una in α, l'altra in β si intersecano su p. Ecc.

paradossale quanto scrisse Norbert Wiener[9]: *Un professore è una persona che sa parlare di qualsiasi argomemto per esattamente cinquanta minuti.*

Ho già osservato che un insegnate di geometria deve saper disegnare. Ancora una cinquantina di anni fa un intero anno accademico era dedicato alla Geometria Descrittiva, materia questa che è stata eliminata dai piani di studio delle nostre università e sostituita con discipline obbiettivamente più importanti ai fini della ricerca, ma non ai fini della preparazione degli insegnanti delle scuole secondarie. La geometria descrittiva aiuta potentemente l'intuizione delle figure spaziali e fornisce gli strumenti per rappresentarle correttamente con un disegno sopra un foglio di carta. D'altra parte, le idee fondamentali della Geometria Descrittiva preparano idee e metodi che dominano in campi assai più elevati della geometria.

Il disegno delle figure dello spazio può avere degli scopi, ad esempio didattici, indipendentemente dalla possibilità di applicazioni pratiche: *per il matematico è compito altrettanto degno il saper disegnare bene come il saper calcolare bene* (F. Klein).

3. Nell'ultima pagina del suo *Aperçu historique,* Michel Chasles scriveva (più o meno) che:

Nella geometria antica le verità erano isolate ed era difficile immaginare o creare delle nuove verità. E non bastava volerlo per diventare un geometra creatore.

Al giorno d'oggi chiunque può prendere una qualsiasi verità nota e sottometterla ai diversi principi generali di trasformazione e cavarne altre verità, differenti o più generali; e queste saranno suscettibili di simili trattamenti, di sorta che uno potrà moltiplicare, quasi all'infinito, il numero delle nuove verità dedotte dalla prima. Tutte, è ben vero, non meriteranno di vedere il giorno, ma un certo numero di esse potranno avere qualche interesse e condurre a qualcosa di molto generale.

Chi vorrà potrà realizzare e creare in Geometria: il genio non è più indispensabile per aggiungere un mattone all'edificio.

Sono trascorsi quasi due secoli ed in questo periodo la geometria ha fatto immensi progressi. Allo studio proiettivo delle curve e delle superficie algebriche dei primi ordini ha fatto seguito la teoria generale delle curve e delle superficie di qualunque ordine dell'ordinario spazio proiettivo tridimensionale, e quindi la teoria degli spazi proiettivi di qualunque dimensione e delle varietà algebriche in essi contenute. E le trasformazioni proiettive a cui alludeva lo Chasles si sono generalizzate con la nozione di trasformazioni algebriche.

[9]Matematico americano, 1861-1947, considerato il padre della cibernetica.

Sono così cresciute enormemente le ricerche geometriche, ed i procedimenti di trasformazione, ed è cresciuta la facilità di cui parlava lo Chasles di moltiplicare le proposizzioni, di generalizzarle e di creare nuove teorie.

Questa facilità che, almeno in apparenza, è maggiore in geometria che in analisi, o nella fisica matematica, ha indotto molti giovani laureati in matematica a preferire gli studi geometrici, specialmente nell'indirizzo algebrico, commettendo il grave errore di restringere il proprio orizzonte[10].

Tra l'altro la facilità è una pessima consigliera, e molti lavori che si trovano nelle numerose riviste matematiche (e talora anche in riviste prestigiose) non meriterebbero di venir pubblicati; in essi si cerca invano un'idea nuova, un risultato che prima o poi possa servire e che sia destinato a rimanere nella Scienza ed il cui scopo non sia soltanto quello di far carriera. Io stesso, riguardando l'elenco dei miei lavori (che comunque mi son serviti per fare carriera) faccio fatica a trovarne uno che meritasse davvero di essere pubblicato, non fosse altro perché qualcuno se ne sia giovato.

Ma quando è che una questione è importante e merita di formare oggetto di studio? Non si può dare una risposta precisa a questa domanda. L'interesse di un argomento è giudicato in vario modo dai vari uomini e muta con i tempi. Si è spesso attribuita molta importanza ad un problema solo perché molto difficile, anche se il risultato, di per sé, non serve a nessuno: ciò che può avere interesse sono le nuove eventuali tecniche che sono state create per raggiungerlo.

In generale possiamo dire che possono essere importanti tutti gli argomenti che riguardino enti che abbiano essi stessi importanza, e le ricerche che riuniscano cose apparentemente distinte sotto un unico punto di vista, semplificando ed illuminando.

Lo studio dei grandi scienziati è forse il miglior suggerimento che si possa dare ad un giovane che vuol imparare a giudicare dell'importanza di una ricerca. Ecco cosa scrive il grande geometra Eugenio Beltrami: *Imparino i giovani ad educarsi di buon'ora sui capolavori dei grandi maestri, anziché isterilire l'ingegno*

[10] La differenza tra Geometria ed Analisi consiste non tanto nei problemi che esse si pongono, ma sopratutto nei metodi con cui i problemi vengono affronati. Ed è dallo scambiarsi i problemi e prestarsi i metodi, che entrambe le discipline posson trarre grande vantaggio.

Si possono fare molti esempi di risultati geometrici che siano stati ottenuti con gli strumenti propri dell'Analisi Matematica e di questioni geometriche che abbiano condotto alla creazione di nuovi importanti filoni di ricerca in altri settori.

in perpetue esercitazioni da scuola che a nulla approdano, fuorché a creare una nuova Arcadia, ove l'indolenza è velata sotto le forme dell'operosità... Coi forti studi sui grandi modelli si son fatti in ogni tempo i valenti; e con essi dee farsi la nostra nuova generazione scientifica, se vuol esser degna dei tempi a cui nacque e delle lotte a cui è destinata.

Sarebbe utile che i futuri insegnanti inserissero nei loro piani di studio un corso di carattere storico, certamente più utile di un corso di Analisi Superiore o di Geometria Superiore, affidato ad un docente che possegga il carisma che una apprezzata produzionne scientifica può conferire. Io ritengo che la conoscenza della Storia della Matematica sia molto importante non solo per chi aspira all'insegnamento, ma anche per il futuro ricercatore. Va tra l'altro tenuto conto del fatto che una ricerca storica che raccolga e metta in ordine i fatti essenziali concernenti un problema dibattuto, può essere molto più difficile e più creativa di quanto si immagini. Essa richiede tempo e fatica, ed è possibile che apra spiragli inaspettati e conduca a ricerche di qualche rilievo. È mia opinione che una ricerca storica sarebbe un utile divertimento per un insegnante[11].

[11] Anche se la storia registra pochissimi grandi matematici che siano stati anche professori e che abbiano dimostrato interesse per l'insegnamento, non mancano esempi a dimostrare che il mestiere dell'insegnante non è incompatibile con quello di ricercatore. Basti pensare a Ceorge Boole, che Bertrand Russel giudicava essere lo scopritore della matematica moderna), e che insegnò per tutta la vita. Di famiglia modestissima (il padre era un piccolo bottegaio) studiò da solo latino e greco e a 12 anni era in grado di tradurre Cesare ed Orazio... A 16 anni, terminati i corsi della scuola, divenne prefetto in un collegio, con un salario ridicolo. Poi passò quattro anni ad insegnare in una scuola elementare. Non disponeva di alcun capitale e lo stipendio era appena sufficiente per aiutare i genitori e per mantenersi. Dopo aver pensato di entrare nel clero, decise invece di aprire una scuola privata (a 21 anni). La sua crescente fama di docente e di conferenziere gli fruttò la nomina di professore di matematica nel Queen's College di Cork (Irlanda), nel 1849 (a 34 anni); fu allora più libero di pensare alle sue ricerche e nel 1854 pubblicò la sua opera più importante (*Studio delle leggi del pensiero, sulle quali sono fondate le teorie matematiche della logica e della probabilità*). Morì dieci anni dopo a seguito di una polmonite.

Ma un esempio più clamoroso fu Karl Weierstrass, il principe degli analisti, il padre dell'analisi moderna. Mentre Gauss, Abel e Cauchy sono stai gli artefici del primo periodo del rigore matematico, fu Weierstrass a mostrare che le precauzioni anteriori relative all'uso dell'intuizione non bastavano più. Mentre Gauss aveva chiamato la matematica "Scienza dell'occhio", non bastava più un buon paio d'occhi per vedere la curva scoperta da Weierstrass, che, pur essendo continua, non ha tangente in nessun punto.

Weierstrass era nato da poco tempo quando il padre fu nominato funzionario di dogana alle saline di Westerkotten, in Vestfalia. Poiché non esistevano scuole nel villaggio, a 14 anni fu mandato a Munster, al ginnasio cattolico di Paderborn. Primo in tedesco, latino, greco, matematica, aveva una pessima calligrafia benché fosse destinato ad insegnare a leggere e scrivere ai bambini.

Suo padre, ritenendo che Weierstrass fosse adatto a continuare il suo mestiere di ispettore di dogana, lo invitò all'Università di Bonn affinché imparasse i cavilli del commercio e le finezze della giurisprudenza. Ciò che Weierstrass non fece affatto; anzi trascorse a Bonn un quadriennio di vita spensierata, con amici, birra, duelli, ... Egli pensò in seguito che il quadriennio trascorso a Bonn non era andato perduto. In quegli anni imparò a comprendere le debolezze e le aspirazioni di altri meno dotati di lui; ciò che contribuì notevolmente al suo successo come professore di matematica. Nel 1841, a 26 anni, superò l'esame per ottenere il brevetto di professore. A 33 anni fu nominato titolare nel Gymnasium di Braunsberg. Tuttavia le idee creatrici sulle quali ha fondato tutta la sua opera furono concepite quando nel Pro-Gymnasium di Deutsch-Krone (Prussia occidentale) insegnava non solo matematica e fisica ma anche tedesco, geografia e scrittura nelle classi dei piccoli e perfino ginnastica, fino al 1845. A quei tempi, le scuole tedesche presentavano dei "Programmi" che contenevano i rapporti degli insegnanti. Weierstrass vi inserì le sue *Osservazioni sulle fattoriali analitiche.* Nel programma 1848-49 del Gymnasium di Braunsberg Egli inserì la Memoria *Contributi alla teoria degli integrali abeliani.* Se questo capolavoro fosse capitato nelle mani di qualche matematico di professione, la gloria di Weierstrass sarebbe stata assicurata. Ma chi avrebbe pensato di cercare una Memoria di Matematica pura nei programmi di una scuola elementare?