

Carlo Penco

Kant, Frege e i fondamenti della matematica:

il problema dell'ambiguità del senso

Dipartimento di Matematica –

Genova 29 Novembre 2005

formalismo:

Hilbert richiama Kant e l'intuizione dello spazio

intuizionismo:

Brouwer richiama Kant e l'intuizione del tempo

logicismo:

il primo Frege rigetta il sintentico a priori per l'aritmetica e lo mantiene per la geometria; l'ultimo Frege fonda la matematica sull'intuizione geometrica (Kant vendicato)

Frege: una visione logicista della matematica

contro il formalismo:

la matematica ha un contenuto



la logica ha un contenuto

- a) contro Boole (calcolo) e contro Peano (lingua)
- b) senso e riferimento dei numerali
- c) senso degli "enunciati"?

Cos'è il contenuto o senso degli enunciati (formule)?

FREGE 1906 lettera a Husserl

(1) DEFINIZIONE DI SENSO: enunciati [logicamente] equivalenti hanno qualcosa in comune e questo è ciò che chiamo il pensiero espresso (pensiero = senso di un enunciato).

(2) FORMA NORMALE Data l'analisi logica, basterebbe un singolo enunciato standard per un sistema di enunciati equipollenti...Dato l'enunciato standard si avrebbe l'intero sistema di enunciati equipollenti e si potrebbe usare l'uno o l'altro a proprio piacimento (per questioni pragmatiche)

(3) riguardo alla questione se $A \rightarrow B$ è equipollente a $\neg (A \& \neg B)$ non ci sono dubbi (basta vedere il calcolo della *Ideografia*)

quindi

dato (1)

" $A \rightarrow B$ " e " $\neg (A \& \neg B)$ " esprimono lo stesso *senso*

Wittgenstein

Senso di un enunciato = condizioni di verità

	$A \rightarrow B$	$\neg (A \& \neg B)$
VV	V	F
VF	F	V
FV	V	F
FF	V	F

DEFINIZIONI DI FREGE 1892 (Über Sinn und Bedeutung)

DEFINIZIONE:

Il senso di un enunciato è il pensiero espresso dall'enunciato

ARGOMENTO

1-PREMESSA:

se **a** e **b** sono

due espressioni con stesso riferimento e diverso senso

(es. "la stella del mattino" e "la stella della sera")

ne segue - per indiscernibilità degli identici - che

se **Pa** è vero anche **Pb** è vero.

Es.: se "la stella del mattino è un pianeta" è vero

anche "la stella della sera" è vero.

2- PREMESSA:

PERO' non ne segue che un parlante, per ignoranza dell'astronomia, non possa credere vero Pa e falso Pb.

3- PREMESSA: COTENIBILITA' RAZIONALE:

se è possibile comprendere due enunciati A e B e credere

coerentemente il primo vero e il secondo falso, allora i

due enunciati esprimono diversi pensieri

4- OSSERVAZIONE: COSA CAMBIA DA Pa a Pb?

Non il riferimento, o il valore di verità che è lo stesso per entrambi, essendo a e b coreferenziali:

non resta che concludere che cambia il senso.

5- CONCLUSIONE

Il senso di un enunciato è il pensiero espresso.

COTENIBILITA' RAZIONALE:

se è possibile comprendere due enunciati A e B e credere coerentemente il primo vero e il secondo falso, allora i due enunciati esprimono diversi pensieri

1. cosa vuol dire "comprendere"?

2. cosa vuol dire "coerentemente"?

1. comprendere = afferrare il senso;

il senso come potenziale inferenziale (*Ideografia*)
non è mai completamente afferrabile da un umano
limiti della comprensione umana

2. coerentemente = senza contraddizione

(giustificata in via empirica o logica)

ma se A e B sono entrambi veri non è coerente
asserire contemporaneamente A e la negazione di B

limiti della razionalità umana

Per un parlante con informazioni limitate
(NON SA che A e B sono entrambi veri)
è coerente

credere A e la negazione di B

E' possibile estendere il concetto di cotenibilità razionale ad asserti logici incompatibili?

$A \rightarrow B$ è logicamente equivalente a $\neg (A \& \neg B)$

"se piove mi bagno"

$A \rightarrow B$

equivale a

non si dà il caso che piove e non mi bagno

$\neg (A \& \neg B)$

Se $A \rightarrow B$ e $\neg (A \& \neg B)$ sono entrambi veri (o falsi)

non è coerente asserire contemporaneamente

$A \rightarrow B$ e la negazione di $\neg (A \& \neg B)$

possiamo dire il seguente? (estendere il principio di cotenibilità razionale dal caso empirico al caso logico)

E' coerente, dal punto di vista delle informazioni limitate e delle capacità computazionali limitate di un parlante, credere $A \rightarrow B$ e la negazione di $\neg (A \& \neg B)$

se NON SI SA che $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg (A \& \neg B)$

RIASSUMENDO:

caso di conoscenza empirica (limiti di informazione)

da:

$a=b$

segue:

$Pa \Leftrightarrow Pb$

ma non segue:

a crede che $Pa \Leftrightarrow$ a crede che Pb

caso di conoscenza logica (limiti di risorse di calcolo)

da

definizione dei connettivi

segue:

$A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg (A \& \neg B)$

ma non segue:

a crede che $A \rightarrow B \Leftrightarrow$ a crede che $\neg (A \& \neg B)$

casi più evidenti $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg \neg (\neg A \vee \neg \neg B)$, ecc.

Conclusione

Come

"Pa" e "Pb" esprimono diversi pensieri

Così

" $A \rightarrow B$ " e " $\neg (A \& \neg B)$ " esprimono diversi pensieri

Quindi

" $A \rightarrow B$ " e " $\neg (A \& \neg B)$ " hanno diverso *sensu*

una palese contraddizione in Frege:

da Frege 1892:

" $A \rightarrow B$ " e " $\neg (A \ \& \ \neg B)$ " hanno diverso *sensu*

da Frege 1906:

" $A \rightarrow B$ " e " $\neg (A \ \& \ \neg B)$ " esprimono lo stesso *sensu*

DOMANDE:

1. perché Frege non si accorse della contraddizione?
2. come si può superare la contraddizione?

1. perché Frege non si accorse della contraddizione?

- antipsicologismo (senso oggettivo)
- diverse preoccupazioni (senso/tono/riferimento)
- mancanza di strumenti concettuali adeguati

1906

Alla domanda se $A \rightarrow B \Leftrightarrow \neg (A \& \neg B)$, oltre che equipollenti (logicamente equivalenti) sono anche "congruenti" Frege risponde:

"Si potrebbe discuterne per un centinaio d'anni o più, ma non vedo quale criterio ci permetterebbe di decidere la questione in modo oggettivo"

2006

Gli studi sulla complessità computazionale, sulle semantiche procedurali, sulla composizione di procedure, sui limiti delle risorse computazionali... aiuteranno a rispondere?

2. come si può superare la contraddizione?

distinguendo due concetti di senso, tra loro correlati:

- **senso₁** come funzione (condizione di verità)

funzione da mondi possibili a estensioni

- **senso₂** come procedura associata alla funzione

procedure diverse sono accessibili a sistemi
cognitivi diversi

una versione di questo lavoro è stata pubblicata
come:

"Frege, sense and limited rationality" Modern Logic Vol.9,
2001-2003 (Issue 29)pp.53-65

e si può trovare in formato .pdf (prima di essere
stata mandata alla rivista) all'indirizzo:

<http://www.dif.unige.it/epi/hp/penco/pub/fregelimited.pdf>